微積分基本定理

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，是 $f(x)$在 $x=x_0$ 的變化率，是局部性質，其幾何意義是曲線 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的切線斜率。因此 $y=f'(x)$ 可以說是 $y=f(x)$的斜率函數。

給一個函數 $f(x)$，求 $f'(x)$ 的過程叫作微分運算。

函數的和是整體的性質，其幾何意義是曲線 $y=f(x)$和直線 $x=a$，$x=b$ 所圍成的區域面積。求面積的過程叫作積分運算。

微積分基本定理

假設 $f(t)$是一個閉區間$[a，b]$上的連續函數，$S(x)=f(t)$在區間$[a，x]$上的和，

即 $S(x)=\int_a^x f(t)dx$，則 $S'(x)=f(x)$

證明

$S(x_0+h)-S(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ $=y=f(x)$與 $x=x_0$，$x=x_0+h$ 所圍成的面積$\approx f(x_0)h$

所以 $S'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}=f(x_0)$，對所有的 $x=x_0$ 都成立

亦即 $S'(x)=f(x)$

微分與積分是逆運算，即 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$，$\int_a^x f'(t)dt=f(x)$

計算上，微分比較簡單，積分比較困難。但是因為有微積分基本性質，所以積分的工作就是在找反導函數，即找到一個 $G(x)$，$G(a)=0$，$G'(x)=f(x)$，則 $G(x)$ $=\int_a^x f(t)dt$

The function f is defined on the closed interval $[-5, 4]$. The graph of f consists of three line segments and is shown in the figure above.

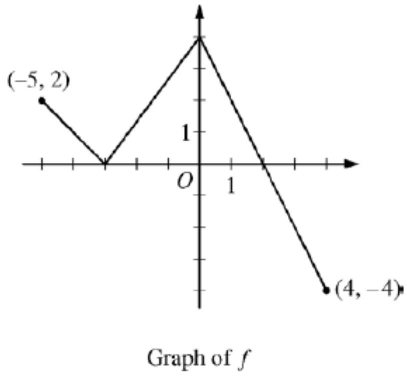
Let g be the function defined by $g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$.

(a) Find $g(3)$.

(b) On what open intervals contained in $-5<x<4$ is the graph of g both increasing and concave down? Give a reason for your answer.

(c) The function h is defined by $h(x)=\dfrac{g(x)}{5x}$. Find $h'(3)$.

(d) The function p is defined by $p(x)=f\left(x^2-x\right)$. Find the slope of the line tangent to the graph of p at the point where $x=-1$.



Graph of f

ANS (a)　(b)-5<x<-3 or 0<x<2　(c)　(d)6　　2014AB

例1. $f(x)=x^n$，找到 $G(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ 滿足 $G'(x)=x^n=f(x)$，$S(x)=\int_a^x t^n dt$，則 $S(x)$

$=G(x)-G(a)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}-\dfrac{1}{n+1}a^{n+1}$

假設 $g(x)=x^{n+1}$ *，則* $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{n+1}-x^{n+1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[x^{n+1}+C_1^{n+1}x^n h+C_2^{n+1}x^{n-1}h^2+\ldots]-x^{n+1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}[(n+1)x^n+C_2^{n+1}x^{n-1}h+\ldots]=(n+1)x^n$ *，所以* $G'(x)=\dfrac{1}{n+1}\times(n+1)x^n=x^n$

例2. (1)$f(x)=\dfrac{1}{x}$，試證 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ (2)求 $\int_1^2(-\dfrac{1}{x^2})dx=$

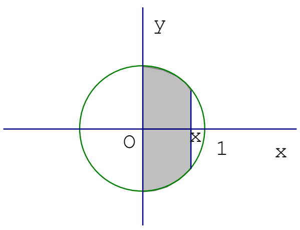
(1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x-(x+h)}{hx(x+h)}=\dfrac{-1}{x^2}$

(2)由(1)，及微積分基本定理 $\int_1^2(-\dfrac{1}{x^2})dx=\dfrac{1}{x}\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

例3. 令 $f(x)$表右圖單位圓內斜線部分面積，$0<x<1$，則 $f'(x)=$

(A) $\sqrt{1-x^2}$

(B) $-\sqrt{1-x^2}$



(C) $2\sqrt{1-x^2}$

(D) $-2\sqrt{1-x^2}$

(E) π

【 C 】

【解 單位圓方程式為 $x^2+y^2=1$， $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ ，因為 x 軸上方與下方的面積相同，所以斜線部分面積為 $f(x)=2\int_0^x\sqrt{1-t^2}dt$ ，由微積分基本定理

$f'(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 】

例4. $f(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)(t-3)dt$ ，求 $f(x)$的極大值 $6\frac{2}{3}$

例5. 三次函數 $f(x)$的導函數 $f'(x)=3x^2-6x+1$，且 $f(1)=2$，求 $f(x)$

$f(x)=x^3-3x^2+x+3$