

§ 書上是這麼說的：

1. 1770 年 尤拉把一個向量開根號，得到旋量。
2. 1913 年 Elie Cartan 引入旋量。
3. 1927 年 Dirac 把相對論形式的能量-質量方程開根號，得到 Dirac 方程與旋量。(因此也預測有正電子)

§ 01 1770 年 Euler 的工作：

$$V = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad V \cdot V = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)I_2 = W^2 \quad \text{開方得} \quad W = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix},$$

$$\det W = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

將整個空間轉動，令轉軸平行於(m,n,l)向量，轉角 $\theta = 2 \arctan \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}$

利用 W，Euler 發現 R^3 中轉動群的一種新表示：

$$W' = \frac{UWU^*}{1 + \frac{1}{4}(m^2 + n^2 + l^2)}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 + \frac{i}{2}l & \frac{1}{2}(im + n) \\ \frac{1}{2}(im - n) & 1 - \frac{i}{2}l \end{bmatrix}$$

當 θ 轉動為 4π 時 W 轉回原位，而這時向量 V 轉兩周，W 為向量 V 的二重覆蓋。

Euler 所找到的這種轉動群的新表示，即轉動群 O(3) 的旋量表示。

[物理學家用微分幾何] 侯伯元 p.353

§ 02 把 relativistic energy-mass equation $E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$ 開根號是甚麼意思？

開根號在這裡是比喻性的說法，指的是 Dirac 試圖將上述的 E^2 方程式轉換為一個線性於 E 的方程式。為什麼需要這樣做？

這方程式是從愛因斯坦的質能等價原理推導出來的，適用於高速（相對論性）

粒子。其中 $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

在量子力學中，能量 E 和動量 p 是算符（operators）：

$$E \text{ 對應於時間導數算符：} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$P \text{ 對應於空間導數算符：} p \rightarrow -i\hbar \nabla$$

Dirac 的突破在於，他引入了一組特殊的矩陣（稱為 Dirac 矩陣）來表示這個平方根操作。

假設存在矩陣 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ ，使得能量 $E = c\alpha \cdot p + \beta mc^2$

其中 $\alpha \cdot p = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z$, β 是另一個矩陣，使得

$(c\alpha \cdot p + \beta mc^2)^2 = E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$ 展開必須滿足反對易關係(anticommutation relations)

展開後，可以推導出矩陣必須滿足：

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \text{ (當 } i \neq j \text{ 時, } \alpha_i, \alpha_j \text{ 反對易; 當 } i=j \text{ 時, } \alpha_i^2 = 1 \text{)}$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\beta^2 = 1$$

Dirac 發現，要滿足這些反對易關係， α 與 β 必須是 4×4 矩陣。這意味著波函數 ψ 不再是單一成分，而是有四個分量的旋量 (spinor)：

將量子算符代入 ($E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p \rightarrow -i\hbar \nabla$)，就得到完整的 Dirac 方程：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi \text{ 或者寫成更緊湊的形式:}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

其中 Hamiltonian 算符 $H = c\alpha \cdot p + \beta mc^2$ 且 $p = -i\hbar \nabla$