§ A child guide to spinors

2.1 The Pauli matrices

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

滿足$[\frac{1}{2}\sigma_i,\frac{1}{2}\sigma_j]=\frac{1}{2}i\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\varepsilon_{123}=1$ Lorentz algebra

2.2 The Hermitian matrix

$$x^\mu\sigma_\mu=t\sigma_0+x\sigma_x+y\sigma_y+z\sigma_z$$

$$H=\begin{pmatrix}t+z&x-iy\\x+iy&t-z\end{pmatrix}，\det H=t^2-x^2-y^2-z^2$$

$$H'=UHU^*=\begin{pmatrix}t'+z'&x'-iy'\\x'+iy'&t'-z'\end{pmatrix}$$

3 Lorentz transformations

Rotation

$$R_x=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&\sin\theta\\0&0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$R_y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&-\sin\theta\\0&0&1&0\\0&\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},R_z=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Boost

3.1 Rotation generator

J_i

3.2 Boost generator

$$K_x=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，K_y=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},K_z=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$[K_x,K_y]=-iJ_z$ ：

1. Two boost in different directions result in a rotation
2. There is a minus sign that turns out to be all-important in the over all scheme of things。

What it means is that if we append $\pm i$ to any K_i, we get the commutator

$$[\pm iK_x, \pm iK_y] = iJ_z,$$

which gives precisely the same algebra as that for the J_i. Thus, if the J_i are assigned the representation $J_i \to \frac{1}{2}\sigma_i$, then we can also assign the similar representation $\pm iK_i \to \pm\frac{1}{2}\sigma_i$. That is,

$$e^{K_i} \to e^{\pm\frac{1}{2}i\sigma_i}$$

We can therefore write the complete unitary 2×2 transformation matrix for spinorial rotations and boosts as either of two combined quantities,

$$U = e^{\frac{1}{2}i\sigma\cdot\theta - \frac{1}{2}\sigma\cdot\phi} \tag{5.1}$$

or

$$U = e^{\frac{1}{2}i\sigma\cdot\theta + \frac{1}{2}\sigma\cdot\phi} \tag{5.2}$$

The spinor associated with (5.1) is traditionally called a righthanded spinor (and given the label φ_R)，while the other is a lefthanded spinor，called φ_L (these spinors are also called Weyl spinors in honor of the man who elucidated many of their properties)。

One of the amazing facts of physics is that all neutrinos in the universe are left handed (because their Spinor descriptions are of the left-handed type)。

Nature is lefthanded。

4.

$$U_k = e^{\frac{1}{2}i\sigma_k\theta}$$

5. Representations

Lorentz algebra of the rotation generators

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

Lorentz algebra of the Pauli matrices

$$[\frac{1}{2}\sigma_x, \frac{1}{2}\sigma_y] = \frac{1}{2}i\sigma_z$$

$$SO(4) = SU(2) \oplus SU(2)$$

What is the double cover？

6. The Dirac equation

在非相對論量子力學中，Schrödinger 方程式（$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$）只處理低能情況，

Dirac equation $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,t) = mc\psi(x,t)$ ，$\gamma^\mu = 4\times4$ Dirac gamma matrices。

當發現電子存在兩種態，electron $spin\left\langle \begin{matrix} up \\ down \end{matrix} \right., \pm\frac{1}{2}$

電子自旋實驗：Otto Stern，Walther Gerlach 1921-1922
1927 年 Dirac 把狹義相對論引進薛丁格方程，創立了 Dirac 方程。
1928 年 Dirac 有個重大發現：

Dirac 方程中，$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix}$ 其中 φ_R 代表通常電子的 spin-up，spin-down 的兩個 component。φ_L 代表 anti-electron(後來稱謂正電子 positron)的 spin-up，spin-down。電子自旋是本徵角動量(intrinc angular momentum)的形式，稱為 S。也因此預測了反物質。
正電子在 1932 年被發現。
1933 年，Dirac 得到諾貝爾物理獎。

§ 把 relativistic energy-mass equation $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ 開根號是甚麼意思？
開根號在這裡是比喻性的說法，指的是 Dirac 試圖將上述的 E^2 方程式轉換為一個線性於 E 的方程式。為什麼需要這樣做？
這方程式是從愛因斯坦的質能等價原理推導出來的，適用於高速（相對論性）粒子。其中 $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

在量子力學中，能量 E 和動量 p 是算符（operators）：

E 對應於時間導數算符：$\mathrm{E} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

P 對應於空間導數算符 $p \to -i\hbar\nabla$

Dirac 的突破在於，他引入了一組特殊的矩陣（稱為 Dirac 矩陣）來表示這個平方根操作。

假設存在矩陣 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ ，使得能量 $E = c\alpha \cdot p + \beta mc^2$

其中 $\alpha \cdot p = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z$ ， β 是另一個矩陣，使得

$(c\alpha \cdot p + \beta mc^2)^2 = E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ 展開必須滿足反對易關係(anticommutation relations)
展開後，可以推導出矩陣必須滿足：

$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}$(當 $i \neq j$ 時， α_i, α_j 反對易；當 i=j 時， $\alpha_i^2 = 1$)

$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$
$\beta^2 = 1$

Dirac 發現，要滿足這些反對易關係，α 與 β 必須是 4×4 矩陣。這意味著波函數 ψ 不再是單一成分，而是有四個分量的旋量（spinor）：

將量子算符代入($E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, p \to -i\hbar\nabla$)，就得到完整的 Dirac 方程：

$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\hbar c\alpha\cdot\nabla + \beta mc^2)\psi$ 或者寫成更緊湊的形式：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

其中 Hamiltonian 算符 $H = c\alpha\cdot p + \beta mc^2$ 且 $p = -i\hbar\nabla$