§ Minkowski 空間的自旋變換群

Minkowski 空間的自旋變換群，指的是特殊線性群 SL(2,C)，它是 Minkowski 空間的等距變換群——洛倫茲群 $SO^+(1,3)$ 的雙重覆蓋群（Double Covering Group）。

1. Minkowski 空間與其對稱性：洛倫茲群

- **Minkowski 空間**：是描述狹義相對論時空的數學模型。它是一個四維空間，其度規（測量時空間隔的規則）為 $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$（採用簽名 (-, +, +, +)）。這個度規決定了光錐結構和因果關係。
- **洛倫茲群 (SO(1,3))**：是所有保持Minkowski度規不變的線性變換（旋轉和boost）所構成的群。它描述了狹義相對論中所有允許的參考系之間的變換（如空間旋轉、沿某個方向的勻速運動）。
- **固有正交時空群 ($SO^+(1,3)$)**：是洛倫茲群中保持時間方向和空間方向（即不包含時間反演和宇稱反演）的連通子群。這是物理學中最常關注的部分。

2. 覆蓋群 (Covering Group) 與自旋表示 (Spin Representation)

- **問題**：在量子力學中，粒子由**波函數**描述，而基本粒子根據其**自旋**分類（如電子是自旋1/2的費米子）。我們發現，當參考系進行一個洛倫茲變換時，**電子這類半奇數自旋粒子的波函數並不是按照 $SO^+(1,3)$ 的表示進行變換**。
- **數學根源**：群 $SO^+(1,3)$ 不是**單連通**的。這意味著存在一些環路，無法連續地收縮為一個點。
- **解決方案**：對於一個非單連通的群，我們可以找到它的**萬有覆蓋群** (Universal Covering Group)。這個覆蓋群是單連通的，並且通過一個 2:1 的同態映射到原始群上。
- **對應關係**：$SO^+(1,3)$ 的萬有覆蓋群正是 **SL(2, ℂ)**。這個覆蓋關係就是開頭提到的「自旋變換群」的由來。
    - SL(2, ℂ) 是 **2x2 複數矩陣**，且其行列式 (Determinant) 為 **1**。
    - 正是這個群提供了半奇數自旋粒子（旋量）在洛倫茲變換下的正確變換規則，即**自旋表示**。

具體的對應關係

1. **將時空點表示為 2x2 埃爾米特矩陣：**
   Minkowski 空間中的一個四維向量 $X^\mu = (t, x, y, z)$ 可以對應到一個矩陣：
   $$X = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$$
   這個矩陣是埃爾米特矩陣 (X = X†)，並且有 $\det(X) = -(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) = -(X^\mu X_\mu)$，正好是時空間隔（的負值）。

2. **SL(2, ℂ) 的作用：**
   對於任意 $A \in SL(2, \mathbb{C})$，我們定義它對矩陣 X 的作用為：
   $$X \to X‘ = AXA^\dagger$$
    - 由於 A 的行列式為 1，容易證明 $\det(X’) = \det(X)$。這意味著時空間隔 $X^\mu X_\mu$ 保持不變。
    - 變換後的 X′ 仍然是一個埃爾米特矩陣，所以可以對應回一個新的四維向量 $X’^\mu$。
    - 因此，每一個 A 都誘導出了一個保持時空間隔不變的變換，即一個洛倫茲變換 $\Lambda(A)$。

3. **2:1 的映射**：

   注意，**A** 和 **-A** 作用在 X 上會產生完全相同的結果：

   $$(-A)X(-A)^\dagger = (-A)X(-A^\dagger) = AXA^\dagger$$

   所以，**兩個**不同的 SL(2, ℂ) 元素（A 和 -A）對應到**同一個**洛倫茲變換 $\Lambda(A)$。這就明確展示了 2:1 的對應關係。

物理意義與重要性

1. **描述量子場的洛倫茲變換**：在量子場論中，**旋量場**（如描述電子的狄拉克場）在洛倫茲變換下，其場分量並不是按照四維向量（1/2, 1/2表示）的方式變換，而是按照 **SL(2, ℂ)** 的 **(1/2, 0)** ⊕ **(0, 1/2)** 表示進行變換。這正是「自旋」概念的數學根源。沒有這個覆蓋群，就無法正確描述費米子。
2. **Wigner 分類**：在對粒子進行相對論性分類時（Wigner's classification），其核心是研究**龐加萊群**（Poincaré group，即洛倫茲群加上時空平移）的**不可約酉表示**。而由於龐加萊群包含洛倫茲群，它的表示也依賴於 SL(2, ℂ) 的表示。不同質量和自旋的粒子對應於龐加萊群的不同表示。
3. **從旋量到向量**：上面的數學構造（$X \to AXA^\dagger$）展示了一個深刻的觀點：**時空本身（四維向量）可能是由更基本的、變換性質更奇怪的對象（旋量）「構造」出來的**。這為理解時空的深層結構提供了線索。