

§ Spin(3)

簡單來說，對於 $SO(3)$ 中描述的每一個「真實世界」的旋轉，在 $Spin(3)$ 中都有兩個元素與之對應。 $Spin(3)$ 提供了一種更完整、更基本的方式來描述旋轉，這在量子力學中尤其重要。

總而言之， $Spin(3)$ 是對三維空間旋轉更深層次的描述。

1. 定義

$$Spin(3) = \{s \in cl_3 \mid \tilde{s}s = 1, s\bar{s} = 1\}$$

$Spin(3)$ 是 $SO(3)$ 的雙重覆蓋(double covering)

The group homomorphism (群同態) $\rho: Spin(3) \rightarrow SO(3)$ is surjective with kernel $\{\pm 1\}$ 因此是二對一的映射。(即 $Spin(3)$ 中的每個元素對應 $SO(3)$ 中的一個旋轉，但 $SO(3)$ 中的每個旋轉對應 $Spin(3)$ 中的兩個元素)。

2. 拓撲意義：

$Spin(3)$ 是單連通。 $(SO(3)$ 不是單連通。)

A Lie group is simply connected if it is connected and every loop in the group can be shrunk to a point。

3. 具體實現與同構：

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \quad SU(2) = \{s \in M(2, \mathbb{C}) \mid s^\dagger s = I, \det s = 1\}$$

$U^\dagger$ 是 U 的共軛轉置。

$Spin(3) \cong SU(2)$ ，表示 $SU(2)$ 與 $Spin(3)$ 有完全相同的李群結構， $SU(2)$ 的矩陣表示提供了 $Spin(3)$ 的具體計算工具。

$$Spin(3) \cong \{q \in H \mid |q| = 1\} \text{ (單位四元數群)}$$

4. Clifford algebra 的關聯

$Spin(3)$ 是三維空間的 Clifford 代數 $cl_3(\mathbb{R})$ 中偶子空間的單位元素群。

特性	$Spin(3)$	$SO(3)$
數學表示	單位四元數 或 $SU(2)$ 矩陣	3x3 特殊正交矩陣
拓撲性質	單連通 (Simply Connected)	非單連通 (Not Simply Connected)
物理應用	描述費米子 (如電子) 的自旋	描述宏觀物體或玻色子的旋轉
旋轉週期性	720° 回到初始狀態	360° 回到初始狀態
與另一方的關係	是 $SO(3)$ 的雙重覆蓋 (Double Cover)	是 $Spin(3)$ 除以其中心 $\{I, -I\}$ 的結果

5. $Spin(3)$ 的生成元：旋轉生成元

$$M_{ij} = \frac{1}{2} e_i e_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j$$

在三維空間有三個獨立生成元，分別對應於三個圓心角軸旋轉。

這三個生成元 M_{12}, M_{23}, M_{31} 的對易(Lie bracket)關係正好滿足 $[M_{ij}, M_{jk}] = M_{ik}$

這三個生成元也可以換成 $J_1 = \frac{1}{2}e_2e_3, J_2 = \frac{1}{2}e_3e_1, J_3 = \frac{1}{2}e_1e_2$

這組生成元作用於旋量空間時，就是標準的自旋角動量生成元。

利用克利福德代數，可以用簡單的乘法規則直接編寫出旋轉的生成元(如

$\frac{1}{2}e_ie_j$)，這對於計算和推導三維空間旋轉的性質非常方便，並與 $SO(3)$ 的李代數直接對應。

克利福德代數內含了向量空間的所有幾何信息，包括旋轉、反射與鏡像。這使得 $Spin(3)$ 作為空間旋轉的基礎對稱群，能夠被「計算化」和「公式化」地具體操作。