§ 旋轉

二向量(bivector)通過收縮操作生成旋轉。

F=$u\wedge v$ ， $x\in R^4$ ， $F\lrcorner x$ 表示 F 沿 x 方向右縮(right contaction)，$=(v\bullet x)u-(u\bullet x)v$

把一個 bivector 映射到一個 vector

一個 Spin(4)中的元素 $e^{F/2}$ 映射到 SO(4)中的一個旋轉 e^{A}

例 x_1-x_2 平面內角度為 θ 的旋轉

$F=\theta(e_1\wedge e_2)\cdots$編碼了旋轉平面與角度

取測試向量 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4$

$A(x)=F\lrcorner x=\theta(e_1\wedge e_2)\lrcorner x=\theta[(e_2\bullet x)e_1-(e_1\bullet x)e_2]=\theta(x_2e_1-x_1e_2)\cdots$右收縮生成無窮小旋轉的生成元 A

其矩陣表示為 A=$\begin{pmatrix}0&\theta&0&0\\-\theta&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ (note that $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\\0\end{pmatrix}$)

$e^{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $e^{A}=\exp\left(\begin{pmatrix}0&\theta\\-\theta&0\end{pmatrix}\right)\oplus I_2=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\oplus I_2$

指數映射給出有限旋轉。

e^{F} 對應指數映射，$(I+F)(I-F)^{-1}$對應 Cayley 變換。兩者都可以產生 Spin 群的元素並描述旋轉，只是角度的函數關係不同。

在 Spin(4)中 $e^{F/2}=e^{\theta(e_1\wedge e_2)}=\cos\dfrac{\theta}{2}+e_1e_2\sin\dfrac{\theta}{2}$

$A=[\omega]_x$ (以 ω 為軸向量)，$\omega=t\,\hat{z}$

$A=\begin{pmatrix}0&-t&0\\t&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ Cayley 參數為 t>0

F 在 R^3 與 A 對應，則 $Q=(I+A)(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}&\dfrac{-2t}{1+t^2}&0\\\dfrac{2t}{1+t^2}&\dfrac{1-t^2}{1+t^2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \theta = 2\arctan t$$

若取 t=1，則$\theta = 90^0$ ，$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$即繞 z 軸順時針(看向 z 軸)旋轉$90^0$

也就是說，Spin(n)的元素寫成$e^{F/2}$映射到$e^A \in SO(n)$ ，這個映射是 double covering。

U 是一個 rotation matrix $U = (I+A)(I-A)^{-1} \in SO(n)$稱為 Cayley 變換

q 是一個四元數，$v' \to qvq^{-1}$表示R^3的旋轉，這是 Hamilton 發現的；Clifford 推到 n 為空間。

此時 R 是一個 rotor，$v \to RvR^{-1}$ (the group of rotors 即為 Spin(n))

這個旋轉的表現是 R.Lipschitz 發現的，Lipschitz group 也稱為 Clifford group。