

§ Clifford algebra  $cl_4$  of  $R^4$  [Spinor 801-2]

Orthonormal basis  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = 1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \text{ for } i \neq j \quad \dim(cl_4) = 16$$

$\omega = e_1 e_2 e_3 e_4$  是 volume element  $\omega^2 = 1$

$$u \in cl_4, \quad u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 + \langle u \rangle_4$$

$\hat{u} = + - + -$  grade involution

$\tilde{u} = + + - -$  reversion(反轉)

$\bar{u} = + - - +$  Clifford-conjugation

$cl_4 \cong M(2, H)$  :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

If the square of a bivector is real, then it is simple.

例  $B = e_{12} + e_{34}$

$$B^2 = \dots = -2 + 2e_{1234} \notin R \quad \text{so } B \text{ is not simple.}$$

在 Clifford algebra 中,  $e_1 \wedge e_2$  是 simple bivector, 代表  $e_1 - e_2$  平面。

$(ae_1 + be_2) \cdot (ce_3 + de_4) = 0$  表示  $e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4$  是兩正交平面。

例

$$e_1 e_2 + e_3 e_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)(e_2 + e_4) + \frac{1}{2}(e_1 - e_3)(e_2 - e_4)$$

表示  $R^4$  中的 bivector 可分解為兩 simple components, 但這分解不是唯一的。

§ The group Spin(4) and its Lie algebra

$$Spin(4) = \{s \in Cl_4^+ \mid s \tilde{s} = 1\}$$

1. A Lie group
2. The double covering of  $SO(4)$
3. Simply connected
4.  $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$   $SU(2) \cong \{U \in M(2, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I, \det U = 1\}$
5. The Lie algebra  $spin(4) \cong su(2) \oplus su(2)$

§ Bivector  $F$  通過收縮操作生成旋轉

$$F = u \wedge v, F \lrcorner x = (v \cdot x)u - (u \cdot x)v \text{ 稱為右收縮(right contraction)}$$

一個  $Spin(4)$  中的元素  $e^{F/2}$  映射到  $SO(4)$  中的一個旋轉  $e^A$

例  $F = e_1 \wedge e_2, x = 3e_1 + 4e_3$

計算後  $F \lrcorner x = -3e_2$

1. 方向轉向  $x$  在  $e_1$  方向的分量經過收縮後變成  $-3e_2$
2.  $x$  原來  $4e_3$  的部分在收縮後消失了，這說明右收縮會「濾掉」與  $F$  平面正交的內容，只留下與平面相關的部分並進行旋轉。
3. 這個結果  $-3e_2$  剛好是向量  $x$  在  $e_1 e_2$  平面上投影分量旋轉  $90^\circ$  後的結果。

在  $Spin(4)$  的框架下，這種收縮操作 (Contraction) 是無窮小旋轉的體現：

Bivector  $F$  被稱為旋轉的 generator，當我們執行  $x + \varepsilon(F \lrcorner x)$  時，向量  $x$  就會沿著  $F$  平面產生微小的轉動。

$$A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ is a linear transformation, where } A(x) = F \lrcorner x \text{ for } x \in \mathbb{R}^4$$

$$Spin(4) \rightarrow SO(4), e^{F/2} \rightarrow e^A$$

例  $x_1 - x_2$  平面內，角度為  $\theta$  的旋轉

(1)  $F = \theta(e_1 \wedge e_2)$ ，取  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  為測試向量， $\theta(e_1 \wedge e_2)$  編碼了旋轉平面與角度

(2)  $A(x) = F \lrcorner x = \theta(e_1 \wedge e_2) \lrcorner x = \theta((e_2 \cdot x)e_1 - (e_1 \cdot x)e_2) = \theta(x_2 e_1 - x_1 e_2)$

右收縮生成無窮小的生成元 A

$F \cdot x$  把一個 bivector 映射為一個 vector

$$\text{其矩陣表示為 } A = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) e^A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \oplus I_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \oplus I_2$$

指數映射給出有限旋轉

(4) 兩個  $\text{Spin}(4)$  的元素  $\pm e^{F/2}$  都對應到  $\text{SO}(4)$  的旋轉  $e^A$ ，這個映射是 double covering。

U 是一個 rotation matrix  $U = (I + A)(I - A)^{-1} \in \text{SO}(n)$  稱為 Cayley 變換

q 是一個四元數， $v' \rightarrow qvq^{-1}$  表示  $R^3$  的旋轉，這是 Hamilton 發現的；Clifford 推到 n 為空間。

此時 R 是一個 rotor， $v \rightarrow RvR^{-1}$  (the group of rotors 即為  $\text{Spin}(n)$ )

這個旋轉的表現是 R.Lipschitz 發現的，Lipschitz group 也稱為 Clifford group。

§  $\text{Spin}(4)$  與 4 維時空的物理對應關係如何？

與  $\text{Spin}(4)$  最直接的對應是 4 維歐氏時空(4 個空間維度，沒有時間)，旋轉群是  $\text{SO}(4)$ ，其旋量群就是  $\text{Spin}(4)$ 。

$\text{SO}(3,1)$  的雙重覆蓋不是  $\text{Spin}(4)$ ，而是  $\text{Spin}(3,1)$ 。

$$\text{Spin}(3,1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

旋量表示：在  $\text{Spin}(3,1)$  下，旋量仍然是外爾旋量，但左手和右手旋量是  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  的共軛表示。

§  $e^F$  對應指數映射， $(I + F)(I - F)^{-1}$  對應 Cayley 變換

例  $A = \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\omega]_x$  ( $\omega$  為軸向量),  $\omega = t \hat{z}$  Cayley 參數  $t > 0$

$$Q = (I+A)(I-A)^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} & 0 \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \theta = 2 \arctan t$$

若取  $t=1$  則  $\theta = 90^\circ$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  即繞  $z$  軸順時針(看向  $z$  正向)旋轉  $90^\circ$

在  $R^3$  中, 繞  $z$  軸旋轉的平面是  $xy$  平面, 對應  $K = e_{12}$

角度為  $\theta$  的旋轉子(rotor)可寫成  $R(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}K} = \cos \frac{\theta}{2} + K \sin \frac{\theta}{2}$

對向量  $v$  的作用為  $v' = RvR^{-1}$

$\theta = 90^\circ$  時,  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e_{12}), R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e_{12})$

$Re_1 R^{-1} = -e_2, Re_2 R^{-1} = e_1, Re_3 R^{-1} = e_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

§ 何謂 Cayley 變換

$A \in M(n, C)$  (通常要求  $A^* = -A$ ) 其 Cayley 變換為  $U = (I - A)(I + A)^{-1}$

若  $A^* = -A$  則  $U^*U = I$

例  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in R$  則  $U = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & -2a \\ 2a & 1-a^2 \end{pmatrix}$

§ 習作

1.  $a \in R^4, B = \alpha e_{12} + \beta e_{34} \in \Lambda^2 R^4$ , show that  $BaB \in R^4$

2. Compute  $\exp(\alpha e_{12} + \beta e_{34}) =$

$$\cos \alpha \cos \beta + e_{12} \sin \alpha \cos \beta + e_{34} \cos \alpha \sin \beta + e_{1234} \sin \alpha \sin \beta$$

$$(e_{12})^2 = -1 \therefore \exp(\alpha e_{12}) = \cos \alpha + e_{12} \sin \alpha$$

3.  $u = \frac{1}{2}(1 + e_{12} + e_{34} \pm e_{1234})$ , compute  $u^2 =$   $e_{1234}, e_{12} + e_{34}$

4. 在  $Cl(4,0)$  中，定義手性算子 (Chirality operator) 為  $\Gamma = e_1 e_2 e_3 e_4$ 。對於任意向量  $v \in R^4$ ，其與  $\Gamma$  的交換關係為何？  $v\Gamma = -\Gamma v$

5. 考慮  $Spin(4)$  的分解  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 。若一個自旋量在  $\Gamma$  作用下的特徵值為  $+1$ ，它屬於哪一個表示空間？ 半自旋表示  $S^+$

6. 作為李群， $Spin(4)$  的維度 = ? 6(與  $SO(4)$  相同)  $\frac{n(n-1)}{2}$

7.  $Cl(4,0)$  與  $Cl(3,1)$  他們的中心性質有何不同？

8.  $Pin(4)$  與  $Spin(4)$  的拓撲關係為何？  $Pin(4)$  覆蓋  $O(4)$ ， $Spin(4)$  僅覆蓋  $SO(4)$

解答

(1) 設  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$  則  $BaB = (\alpha^2 - \beta^2)(a_1 e_1 + a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4) \in \Lambda^1 R^4$