§ Clifford algebra cl_3

$cl_3 : R^3$的 Clifford algebra，由$\{e_1, e_2, e_3\}$生成， $\dim(cl_3)=8$

$cl_3 \cong M(2,C)$

$$e_1 \simeq \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \simeq \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_3 \simeq \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk} I$$

$e_{12} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 稱為 bivectors

$e_{123} \simeq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$是 volume element，可與$cl_3$的任何元素交換。即$e_{123} \in Cen(cl_3)$

$$x + ye_{123} \simeq \begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x+iy \end{pmatrix}$$

$\{x + ye_{123} \,|\, x, y \in R\}$稱為$cl_3$的 center，用$Cen(cl_3)$表示，是$cl_3$的(even)subalgebra。

$\because (e_{123})^2 = -1, \quad Cen(cl_3) \cong C$

cl_3^+由$\{1, e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$生成，稱為 even subalgebra of cl_3

$$\omega + xe_{23} + ye_{31} + ze_{12} \simeq \begin{pmatrix} \omega+iz & ix+y \\ ix-y & \omega-iz \end{pmatrix}$$

$H \cong cl_3^+ \quad i \simeq -e_{23}, j \simeq -e_{31}, k \simeq -e_{12}$

$\mathrm{C} \otimes \mathrm{H} \simeq cl_3$

$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \in cl_3$ 以下稱為 u 的反演(involution)：

$\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3$ grade involution $+,-,+,-,+$

$\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3$ reversion $+,+,-,-,+$

$\bar{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3$ Clifford conjugation $+,-,-,+,+$

矩陣表現：$u \simeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d \in C$ 則

$\hat{u} \simeq \begin{pmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$，$\tilde{u} \simeq \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \bar{u} \simeq \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

§ reflections and rotations

假設e_1(x 軸方向)，e_2(y 軸方向)，e_3(z 軸方向)

反射：由一個超平面的法向量定義，給定單位法向量 n，任意向量a 的反射操作為$a \to -nan$ 。

例 $a = e_3$對 xy 平面的反射向量為$a' = -nan = -e_3 e_3 e_3 = -e_3$

旋轉：

由旋轉子（rotor）表示，旋轉子是偶次子代數（包含標量、雙向量等）的元素。給定旋轉角度θ和旋轉平面（由單位雙向量B 定義），旋轉子為

$R = \exp(-B\theta/2)$ ，旋轉操作為$a \to Ra\tilde{R}$ ，$\tilde{R}$是 R 的反轉(reverse)。

例 $a = e_1$ 繞 z 軸旋轉θ $\Rightarrow \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$

$B = e_1 e_2, B^2 = -1$

$$R = \exp(-B\theta/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-B\theta/2)^k}{k!} = ... = \cos\frac{\theta}{2} - B\sin\frac{\theta}{2}$$

代數	空間模型	矩陣表示	應用領域
cl_4	R^4	2×2四元數矩陣	4 維空間的旋轉
$cl_{3,1}$	Minkowski spacetie	3 維空間 1 維時間	Dirac 方程中的 gamma matrices
$cl_{1,3}$	反轉 Minkowski 時空		某些物理模型 對稱性研究

cl_4與$cl_{1,3}$都對應到 M(2,H)，但是它們的幾何結構與物理意義不同。