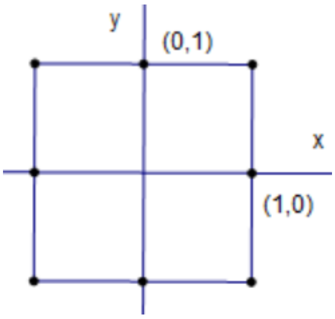
§ Representation [Spinor701-1]

簡單來說，一個群的表示就是找到一個向量空間 V 和群同態 $\rho: G \to GL(V)$ 。這裡的「表示」指的是用V 的線性變換來「代表」或「實現」群G 的元素。

$G \overset{\rho}{\to} V$ 保持群運算 $\rho(g \cdot h) = \rho(g)\rho(h), \rho(e) = I$



正方形所有保持其形狀不變的對稱操作（旋轉和翻轉）所構成的群。它有 8 個元素，稱為二面體群 D_4
群元素(抽象動作)包含旋轉與鏡射：
$D_4 = \{e, r_{90}, r_{180}, r_{270}, s_v, s_h, s_d, s_{ad}\}$

例如 r_{90} 是繞 x 軸逆時針旋轉 90^0 ， s_{ad} 是對直線 y=-x 的鏡射。

把 D_4 的元素對應到一個二階方陣，就是一個表現。只要針對基底(1,0)，(0,1)的映射就可以找到對應的矩陣。 $\rho: D_4 \to GL(2,R)$ ，這裡向量空間 $V = R^2$ ，以下的 $A \in GL(R^2)$

例如 逆時針旋轉 90^0 ， $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ 則 $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

所以 $\rho(r_{90}) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

同理 對直線 y=-x 的鏡射， $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ 則 $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

所以 $\rho(s_{ad}) = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

我們就說 (ρ, R^2) 是 D_4 的一個表現(representation)。

當然這裡還需要驗證滿足「同態」條件，即 $\rho(g \cdot h) = \rho(g)\rho(h), \rho(e) = I$
例如驗證 $\rho(s_{ad} \circ r_{90}) = \rho(s_{ad})\rho(r_{90})$

左邊 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \rho(s_{ad} \circ r_{90}) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

右邊是 $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ，是沿 y 軸的翻轉。OK!

1. SU(2)的表示

   $SU(2) = \left\{ U \in GL(2,C) \middle| U^\dagger U = I, \det(U) = 1 \right\}$ ， $U^\dagger$ 是 U 的共軛轉置。

   是 SO(3)的雙重覆蓋。

對於 SU(2) 這個群，它的不可約表示 (irreducible representations, "irreps") 是最基本的構建基石。這些不可約表示由一個非負的整數或半整數 j 來標記，這個 j 通常被稱為「自旋量子數」(spin quantum number)。

- $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

對於每一個 j，存在一個唯一的 (在同構意義下) $2j+1$ 維的不可約表示。

要理解 SU(2) 的表示，從它的李代數 $\mathfrak{su}(2)$ 出發會更容易。李代數的基底可以由三個生成元 (generators) J_1, J_2, J_3 組成，它們滿足以下的對易關係 (commutation relation)：

$$[J_k, J_l] = i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm} J_m$$

其中 ϵ_{klm} 是列維-奇維塔符號 (Levi-Civita symbol)。

找到 SU(2) 群的表示，等價於找到滿足上述對易關係的矩陣 J_k。在物理上，J_k 通常與角動量算符對應。

以下是幾個最常見和最重要的不可約表示：

j (自旋)	維度 ($2j+1$)	名稱	描述與範例
0	**1**	**平凡表示 (Trivial) 或純量 (Scalar)**	這是一個一維表示。所有的 SU(2) 元素都表示為數字 1。它描述了一個在旋轉下完全不變的物理量（純量）。
1/2	**2**	**基本表示 (Fundamental) 或旋量 (Spinor)**	這是一個二維表示，就是 SU(2) 群本身的 2×2 矩陣。它描述了自旋 1/2 的粒子（如電子）。生成元可以由泡利矩陣 σ_k 來構成：$J_k = \frac{1}{2}\sigma_k$。
1	**3**	**伴隨表示 (Adjoint) 或向量 (Vector)**	這是一個三維表示。它描述了三維空間中向量的旋轉。生成元是 3×3 的矩陣。它對應於自旋為 1 的粒子（如光子）。
3/2	**4**	**旋量 (Spinor)**	這是一個四維表示，對應於自旋為 3/2 的粒子。

用 Pauli 矩陣構造 j=1/2 的表示是 SU(2)的基本表示。

(1) 引入 Pauli 矩陣 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

(2) 定義生成元 $J_k = \dfrac{1}{2}\sigma_k$

(3) 驗證對易關係 例如 $[J_1, J_2] = iJ_3$

(4) 驗證量子數 j：計算總角動量算符 $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ 確認其特徵值為 j(j+1)

物理詮釋：自旋態(略)

我們成功地使用泡利矩陣作為基礎，透過 $J_k = \frac{1}{2}\sigma_k$ 的定義，構造出了 SU(2) 的 $j = 1/2$ 表示。這組 2×2 矩陣不僅滿足了李代數的代數結構，也完美地描述了量子力學中自旋 1/2 粒子的物理性質。

2. Lorentz 群的旋量表示

與 SU(2)的表示由一個數字 j 標記不同，勞倫茲群的（有限維）不可約表示是由一對半整數或整數 (j_L, j_R) 來標記的。

其中 $j_L, j_R = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

旋量表示指的就是那些 j_L 或 j_R（或兩者）為半整數的表示。

其中最基本的是外爾旋量 (Weyl spinors)，它們構成了描述費米子（如電子、夸克）的基礎。

首先，勞倫茲群 SO(1,3)是所有保持閔可夫斯基時空距離
$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2) - (x^3)^2$ 不變的線性變換所構成的群。
物理上我們通常關注的是與單位元素連續相連的部分，稱為正常勞倫茲群 (Proper Orthochronous Lorentz Group)，記為 $SO^+(1,3)$。
這個群的李代數 so(1,3)由 6 個生成元構成：
(1) 3 個旋轉生成元： J_1, J_2, J_3
(2) 3 個加 boost 生成元： K_1, K_2, K_3
它們滿足對易關係

1. $[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm} J_m$ (旋轉生成元自身構成一個 $\mathfrak{su}(2)$ 子代數)
2. $[K_k, K_l] = -i\epsilon_{klm} J_m$ (Boost 操作彼此不對易，其結果是旋轉)
3. $[J_k, K_l] = i\epsilon_{klm} K_m$ (Boost 算符在旋轉下像一個三維向量)

直接從上述複雜的對易關係找出表示很困難。
這裡有一個非常巧妙的數學技巧：我們將李代數複數化，並定義兩組新的生成元：

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{2}(J_k + iK_k), B_k = \frac{1}{2}(J_k - iK_k)$$

當我們計算這兩組新生成元的對易關係時，會得到驚人的結果：
$[A_k, A_l] = i\varepsilon_{klm} A_m, [B_k, B_l] = i\varepsilon_{klm} B_m, [A_k, B_l] = 0$
這表示 A_k, B_k 分別構成獨立的 SU(2)的李代數，所以，我們成功地將複雜的勞倫茲代數分解成了兩個我們已經非常熟悉的 SU(2)代數的直和：
因此 $so(1,3)_C \cong su(2)_C \oplus su(2)_C$
建構表示：(j_L, j_K) 標記法

既然勞倫茲代數可以看成兩個獨立的 SU(2) 代數，那麼它的不可約表示就可以用兩個 SU(2) 的量子數來標記，這就是 (j_L, j_R) 的來源。

- j_L 對應於由 A_k 生成的那個 SU(2) 代數的自旋量子數。
- j_R 對應於由 B_k 生成的那個 SU(2) 代數的自旋量子數。

一個標記為 (j_L, j_R) 的表示，其維度為 $(2j_L + 1)(2j_R + 1)$。

§ 基本旋量表示：Weyl spinors

a. 左手外爾旋量 (Left-handed Weyl Spinor)

- **標記:** $(\frac{1}{2}, 0)$
- **維度:** $(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)(2 \cdot 0 + 1) = 2 \times 1 = 2$
- **物理意義:** 這是一個二分量的複數物件（旋量），它在 A_k（對應 $j_L = 1/2$）的作用下會發生非平凡的變換，但在 B_k（對應 $j_R = 0$）的作用下不變。我們通常用 ψ_L 或 ξ_α 來表示。

b. 右手外爾旋量 (Right-handed Weyl Spinor)

- **標記:** $(0, \frac{1}{2})$
- **維度:** $(2 \cdot 0 + 1)(2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 1 \times 2 = 2$
- **物理意義:** 這也是一個二分量的複數旋量，但它的變換性質正好相反。它在 B_k（對應 $j_R = 1/2$）的作用下變換，但在 A_k（對應 $j_L = 0$）的作用下不變。我們通常用 ψ_R 或 $\eta_{\dot{\alpha}}$ 來表示。

外爾旋量是勞倫茲群不可約的旋量表示。在物理上，它們被認為是描述無質量、具有特定手性 (Chirality) 的費米子的基本單位。
物理中的旋量：狄拉克旋量 (Dirac Spinor)

在現實世界中，像電子這樣的帶電費米子是有質量的。描述它們需要用到狄拉克旋量。

一個狄拉克旋量不是勞倫茲群的不可約表示，而是由一個左手和一個右手外爾旋量組合而成的可約表示：

標記：$(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ 維度：2+2=4

(j_L, j_R)	維度	名稱	物理對應
$(0,0)$	1	**勞倫茲純量 (Scalar)**	自旋為 0 的粒子，如希格斯玻色子
$(\frac{1}{2},0)$	2	**左手外爾旋量 (Left-handed Weyl Spinor)**	無質量的左手費米子（如中微子，近似）
$(0,\frac{1}{2})$	2	**右手外爾旋量 (Right-handed Weyl Spinor)**	無質量的右手費米子
$(\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2})$	4	**狄拉克旋量 (Dirac Spinor)**	有質量的自旋 1/2 費米子，如電子、夸克
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	4	**四維向量 (4-Vector)**	時空座標、四動量、電磁四維勢 A^μ

一個非常深刻的結果是，我們熟悉的四維向量在這種表示框架下，恰好對應於 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 表示。這揭示了時空向量和旋量之間深層的數學聯繫。