§ SO(4)

Rotation：

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Boost：四維空間中時控座標的推進。

$SO(4) = SU(2) \oplus SU(2)$

SO(4) 不僅僅是 SO(3) 在四維空間上的簡單推廣，它擁有一些非常獨特且優美的數學結構，這些結構在三維或更高維中是不存在的。

1. 李代數結構的特殊性
   (1) SO(3)的 Lie algebra so(3)是簡單的，意味著它不能被分解為兩個更小的、非交錯的理想（可以理解為「不可分割」)。
   (2) SO(4)的 Lie algebra so(4)是半簡單的，它可以完美地分解為兩個 so(3)的代數直和： $so(4) \cong so(3) \oplus so(3)$ 。這意味著，四維空間中的任何一個旋轉，都可以被看作是兩個獨立的「三維旋轉」的組合。
   如何理解這兩個「三維旋轉」？
   我們可以定義兩組新的生成元：

$$\mathbf{J}_i = \frac{1}{2}(L_i + K_i), \quad \mathbf{K}_i = \frac{1}{2}(L_i - K_i)$$

   其中 L_i 生成的是三維空間中的「標準」旋轉（保持一個坐標軸不變），而 K_i 生成的是四維空間中專有的「雙旋轉」（同時旋轉兩個平面）。
   神奇的是，這兩組新的算子 **J** 和 **K** 滿足：

$$[J_i, K_j] = 0$$

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k, [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k$$

   所以，一個四維旋轉可以由參數 **(J, K)** 來描述，其中 J 和 K 各自獨立地像一個三維旋轉。這個性質被稱為 **局部同構於 SO(3) × SO(3)**。

2. 物理上的重要意義
   SO(4) 的這個特殊代數結構，在量子力學中有一個著名的應用：求解氫原子的能級。

- 在氫原子中，除了角動量矢量 **L** 是守恆量外，還有一個非常特殊的守恆量**——龍格-楞次矢量 (Runge-Lenz vector) A**。
- 在考慮了量子力學修正後，我們可以構造一組算子，它們正好滿足 so(4) 代數。其中：
  - **J** 和 **K** 可以由 **L** 和 **A** 組合而成。
  - 哈密頓量（能量算符）可以用 $\mathbf{J}^2 + \mathbf{K}^2$ 來表示。
- 由於 so(4) 分裂為兩個 so(3)，其表示理論也類似。我們知道 so(3) 的表示由角動量量子數 j 標記，其維度是 (2j+1)。那麼 so(4) 的表示就由兩個量子數 (j, k) 標記。在氫原子的情況下，這兩個量子數恰好相等，從而**非常優雅地推導出氫原子的能級簡併結構**（即為什麼不同角動量的態會有相同的能量）。

  這個對稱性解釋了為什麼氫原子的能級簡併度比單純的旋轉對稱性（2l+1）要高。

3. 旋轉類型的特殊性：雙旋轉

- **SO(3)**：所有旋轉都是**單旋轉**，即繞一個一維軸（一個點）的旋轉。
- **SO(4)**：存在**雙旋轉**。由於四維空間有6個獨立平面（xy, xz, xw, yz, yw, zw），一個一般的四維旋轉可以分解為兩個獨立、同時進行的**簡單旋轉**，每個簡單旋轉作用在一個**完全正交**的平面上。

  例如，一個四維旋轉可以同時在 xy 平面上以角速度 ω_1 旋轉，並在 zw 平面上以角速度 ω_2 旋轉。這兩個旋轉互不干擾，因為它們作用的平面是正交的。

  這與 so(4) 分裂為兩個 so(3) 的代數事實是相對應的。這兩個 so(3) 可以粗略地理解為分別描述了這兩個正交平面內的旋轉。

4. 拓撲結構的特殊性

從拓撲上來說，SO(3) 的結構是一個三維實投影空間，其基本群是 Z_2（不是單連通的）。

而 SO(4) 的拓撲結構可以通過其通用覆疊群來理解。由於 `so(4) ≅ so(3) ⊕ so(3)`，其對應的通用覆疊群是：

$$\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2)$$

這是一個**直積**，這在 SO(n) 中也是獨一無二的。Spin(4) 是雙連通的，其拓撲結構比更高維的旋量群更簡單。