

§ The Dirac equation

S^3 有唯一的 spin structure(與 $SU(2)$ 等價，是 $SO(3)$ 的 double cover(雙覆蓋群)。

$Spin(n)$ 是 $SO(n)$ 的 double cover。

S^3 的 frame bundle 的結構群是 $SO(3)$ 。

$$Spin(3) \cong SU(2) \cong S^3$$

Dirac spinor 是定義在帶 spin 結構的 manifold 上的 field，所以在 S^3 上可以定義 spinor 與 Dirac equation。

§ 如何在 S^3 上構造 Dirac operator D 的譜？

1. S^3 與 spin structure
2. Spinor bundle 與 Dirac operator
3. $S^3 \cong SU(2)$
4. Dirac operator 的譜與表示論分析
5. 譜公式

§ Dirac 的譜與氫原子的能階

在研究氫原子時，Dirac 方程可以精確求解，並進一步解釋了氫原子的能階結構及其微細結構。

Dirac 方程描述在庫侖勢下的電子，能量本徵值（即 Dirac operator 的譜）如下：

$$E_{nj} = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

其中：

- n ：主量子數
- j ：全角動量量子數
- Z ：原子序（氫原子為 1）
- α ：精細結構常數
- m ：電子質量
- c ：光速

將上式展開可得含微細結構修正的能級：

$$E_{nj} \approx mc^2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right) + \dots \right]$$

這個公式除了描述主要能階分布外，還自動包含了自旋-軌道耦合等微細結構效應，與實驗結果高度吻合 [1](#) [2](#) [3](#)。

Dirac Operator 譜與傳統 (Schrödinger) 氫原子能階的比較

- **Schrödinger 方程**下，氫原子能階只依賴主量子數 n ，能級簡單且不分裂。
- **Dirac 方程**得到的能階譜依賴於 n 及 j ，同一 n 可能因自旋-軌道耦合而出現細微分裂 (fine structure) 。
- 當 $n \rightarrow \infty$ 時，Dirac 模型的能量趨近於電子的靜質能 (即 mc^2)，束縛能則是 Dirac 能量與靜質能之差 ⁴。

譜的物理意義

- Dirac operator 的離散本徵值 (譜) 就對應於氫原子內電子在各能階的能量。
- 該譜包含微細結構：s、p、d 等軌道的細微分裂，這是純非相對論模型無法解釋的。
- Dirac 方程預測的能階與 Schrödinger 方程大致一致，但增加了重要的相對論校正，能更加精確地描述譜線實驗觀察 ^{1 2 3 5}。