§ The Dirac spectrum

§ 01 歷史背景

1927 年 狄拉克結合量子力學與狹義相對論提出描述電子的狄拉克方程，氫原子內精細結構的計算是 20 世紀最重要的工作。

§ 02 Dirac 譜的數學背景

1. 設(M,g)是一個 compact Riemannian manifold，並且 M 配備一個旋量叢 S。

在 S 上構造一個線性微分算子 $D:\Gamma(S)\to\Gamma(S)$ 滿足 $D=i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}$

其中 γ^{μ} 是 Clifford 代數的表示(對應 gamma 矩陣)

∇_{μ} 是聯絡(通常是 Levi-Civita 聯絡的提升)。

若 M 是緊緻無邊界流形，則 D 是一個自伴算子，因此有離散譜
$Spec(D)=\{\lambda_1,\lambda_2,...\},\lambda_i\in R$

2. 與幾何的深層聯繫

Dirac 譜並不只是抽象的特徵值集合，而是與流形的幾何與拓撲結構緊密相關。例如：

(1) 流形曲率影響 Dirac 譜

Lichnerowicz formula $D^2=\nabla^{*}\nabla+\frac{1}{4}R$ (R 是標量曲率)

(2) 拓撲不變量的譜表達：Atiyah-Siger Index 定理

(3) 度量的譜幾何：例（Can one hear the shape of a drum?）

3. 與物理的聯繫：規範場與引力

(1) 費米子場的自由哈密頓量

Dirac 算子對應到費米子場的動力學，例如在平坦時空的 Dirac equation：

$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0$ 的本質即為 Dirac 算子的零模結構

(2) 規範場與旋量聯絡

若引入規範場 A_{μ}，Dirac 算子變成 $D_A=i\gamma^{\mu}(\nabla_{\mu}+A_{\mu})$

(3) 引立場與時空幾何

(4) 非交換幾何與統一理論 Alain Connes 的⋯

4. 重要的譜量與應用：

(1) 零模(zero modes)

Dirac 譜的零特徵值對應拓撲與物理真空結構（例如手徵對稱破缺）。

(2) 熱核展開與譜函數

§ The Dirac spectrum

(3) 譜作用原理(Spectral Action Principle)

5. 小結：

面向	Dirac 譜的角色
幾何	譜編碼了流形的度量與拓撲資訊
物理（場論）	對應費米子場的能譜；與規範場與引力耦合
非交換幾何	成為基礎幾何結構的「替代品」
指數定理與拓撲	零模數量反映拓撲不變量
作用量構造	透過譜作用原理可導出整個規範–引力聯合作用量

§ 03 Dirac 的譜與氫原子的能階

在研究氫原子時，Dirac 方程可以精確求解，並進一步解釋了氫原子的能階結構及其微細結構。

等待研究中…。

§ 04 S^3 上的 Dirac 譜

S^3 有唯一的 spin structure(與 SU(2)等價，是 SO(3)的 double cover(雙覆蓋群)。

$\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2) \equiv S^3$

Dirac spinor 是定義在帶 spin 結構的 manifold 上的 field，所以在 S^3 上可以定義 spinor 與 Dirac equation。

§ 05 Laplace-Beltrami 算子與 Dirac 算子

Laplace-Beltrami 算子譜$\rightarrow$波色子振動能譜

Dirac 算子譜$\rightarrow$量子場費米子的能譜。

Dirac 算子：

1. 描述自旋 1/2 粒子
2. 若只用 Laplacian 無法描述費米子
3. 譜的正負對稱對應到粒子/反粒子的結構

Dirac 算子的譜進一步階是拓撲不變量(例如 Atiyah-Singer index 定理)，Index(D)可以告訴我們流形是否存在某些場的零模。

§ The Dirac spectrum

特性	Laplace-Beltrami 算子 (Δ)	Dirac 算子 (D)
對應粒子	**玻色子** (自旋 0，如標量場)	**費米子** (自旋 1/2，如電子、夸克)
物理圖像	空間的振動模、標量場的量子	費米子的量子波函數、粒子/反粒子能級
譜的特性	特徵值 `λ ≥ 0`，從零開始	特徵值 `μ ∈ ℝ`，關於零對稱（`±μ`）
在 S^3 上的譜	`λ_l = l(l+2)`, `l=0,1,2,...`	`μ_{k,±} = ±(k + 3/2)`, `k=0,1,2,...`
零模	存在（`λ=0`），對應常數函數	**不存在**（因 S^3 有正純量曲率）

S^3 的一個關鍵物理後果：
由於 S^3 具有**正純量曲率**，Dirac 算子沒有零特徵值（`μ=0`）。這在物理上意味著，在這樣一個緊緻的、正曲率的空間中，**不可能存在零模的費米子**。這與手征對稱性破缺等深層物理現象密切相關。相比之下，Laplace 算子總有一個零模（常數函數），這對應於標量場的一個均勻的真空期望值。

§ 06 Dirac 算子

S^3 可視為 R^4 中的單位球面，是一個 compact，connected Lie group，同構於特殊酉群 SU(2)，也是一個 spin manifold，上面有明確的 Dirac 算子。

D=$\sum_j e_j \bullet \nabla_{e_j}$ 是作用在旋量場上的一階微分算子，其中$\{e_j\}$是局部標準正交標架場(orthonormal frame field)，∇是 Levi-Civita connection，• 表示 Clifford 乘法。

尋找所有複數λ，$D\psi = \lambda\psi$ (ψ是非零的旋量場)

對於具有標準度量的三維球面S^3，其狄拉克算子的特徵值λ由以下公式給出：

$$\lambda_k = \pm(k+\frac{3}{2}), k = 0,1,2,3,...$$

1. **特徵值是對稱的：**
   對於任何特徵值 λ_k，其相反數 $-\lambda_k$ 也是一個特徵值。這是狄拉克算子的一個普遍性質，因為如果 ψ 是特徵值為 λ 的特徵旋量，那麼 $\gamma\psi$（其中 γ 是手性元）通常是特ähän值為 $-\lambda$ 的特徵旋量（在奇數維度下，情況稍有不同，但譜的對稱性仍然保持）。

2.當 k=0 時，我們得到絕對值最小的特徵值$|\lambda_0| = \frac{3}{2}$，這也被稱為第一特徵值。

根據 Friedrich 不等式，對於一個正常數曲率的緊緻自旋流形，狄拉克算子的任何特徵值λ都滿足：$\lambda^2 \ge \frac{nS}{4(n-1)}$，其中 n 是維度，S 是純量曲率（scalar curvature）。對於單位S^3，純量曲率 S=n(n-1)=6

3.特徵值的重數

對於每一個特徵值 $\lambda_k = \pm(k+\frac{3}{2})$，其對應的特徵空間的維度(即重數)為

§ The Dirac spectrum

$m_k = (k+1)(k+2)$

度量幾何、波動分析、能量分布+自旋結構、拓撲不變量、費米子物理=完整描述。

§ 07 具體的算法

Bochner-Laplace 算子 $\nabla^*\nabla$

1. 作用在向量叢的截面，例如切向量場、張量場、旋量場
2. ∇ 是向量叢上的協變導數
3. 是 Laplace-Beltrami 算子在向量叢上的自然推廣
4. 當 Bochner-Laplace 算子作用在純量函數時，它等價於 Laplace-Beltrami 算子，即 $\nabla^*\nabla f = \Delta f$

Weitzenbock 公式：

$D^2 = \nabla^*\nabla + R$ 其中 R 是曲率項，取決於流形和叢的結構

對於 S^3 (視為 Spin 流形) $R = \dfrac{\kappa}{4}$ ，κ 是純量曲率=6，所以 S^3 上

$D^2 = \nabla^*\nabla + \dfrac{3}{2}$

這就解釋了為什麼我們之前看到的 Dirac 譜是 $\lambda_k = \pm(k + \dfrac{3}{2})$

§ 08 物理意義的再審視：

玻色子：直接由 Laplace-Beltrami 算子描述

$\Delta\phi = \lambda\phi$

費米子：由 Dirac 算子描述，但是通過 Weitzenbock 公式與 Bochner-Laplace 相關

$D\psi = \mu\psi$ ，其中 $D^2 = \nabla^*\nabla + R$

公式中曲率項 R 代表時空的彎曲對費米子的額外影響。

在 S^3 中這個修正項是 $+\dfrac{3}{2}$ ，這導致

1. 沒有零模 費米子不能有零能量態
2. 能隙
3. 正曲率導致了手征對稱性的明顯破缺

1. **Laplace-Beltrami 算子** 是純量函數上的 Bochner-Laplace 算子
2. **Dirac 算子的平方** 等於旋量叢上的 Bochner-Laplace 算子 **加上曲率修正**
3. 在 S^3 上，這個曲率修正正好是 `+3/2`，這完美解釋了 Dirac 譜的偏移
4. 這也解釋了為什麼兩個算子的譜增長行為不同（二階 vs 一階算子的平方）

這個關係不僅是優美的數學，也深刻地反映了彎曲時空中玻色子和費米子的不同行為：**費米子能直接感受到時空的曲率，並在它們的能譜中表現出來**，而標量玻色子對此不那麼敏感。

§ The Dirac spectrum

§ 09

1. Peter-Weyl 定理在 SU(2)上的應用：任何平方可積的函數 $f \in L^2(SU(2))$ 都可以展開為…
2. Schur lemma
3. Casimir 算子

§ 10

Dirac 譜是譜幾何領域的一個典範，在規範場論與引力相關領域有重要應用。