

在 Clifford algebra 中 $\nabla f = \nabla \bullet f + \nabla \wedge f$

$\nabla \bullet f$ 是內積，作用在向量場時是傳統向量微積分的散度。

$\nabla \wedge f$ 是外積，作用在向量場時是傳統向量微積分的旋度。

在 $\mathbb{R}^n$ 的 Clifford algebra cl_n 中

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

其中 $e_i^2 = 1, e_i e_j = -e_j e_i$ for $i < j$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n \text{ with } x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

例 $f = xye_1 + yze_2 + xze_3$

$$\nabla \bullet f = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge f &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)e_2 \wedge e_3 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)e_3 \wedge e_1 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)e_1 \wedge e_2 \\ &= -y e_2 \wedge e_3 - z e_3 \wedge e_1 - x e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

所以 $\nabla f = (x+y+z) + (-ye_2 \wedge e_3 - ze_3 \wedge e_1 - xe_1 \wedge e_2)$

表示 ∇f 是一個 multivector。標量部分 $x+y+z$ 是場的散度，雙向量部分描述了場的旋轉特性。

這個例子展示了 Clifford 代數的威力：它提供了一個框架，能夠自然地表達向量微積分中的各種運算，並擴展到更高維度和更複雜的場。