

§ 書上是這麼說的：

1. 1913 年 Elie Cartan 引入旋量。
2. 1927 年 Dirac 把相對論形式的能量-質量方程開根號，得到 Dirac 方程與旋量。(因此也預測有正電子)

§ 01 1770 年 Euler 的工作：

$$\mathbf{V} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)I_2 = W^2 \quad \text{開方得} \quad W = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix},$$

$\det W = -(x^2 + y^2 + z^2)$ 將整個空間轉動，令轉軸平行於(m,n,l)向量，轉角

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}$$

利用 W，Euler 發現 R^3 中轉動群的一種新表示：

$$W' = \frac{UWU^*}{1 + \frac{1}{4}(m^2 + n^2 + l^2)}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 + \frac{i}{2}l & \frac{1}{2}(im + n) \\ \frac{1}{2}(im - n) & 1 - \frac{i}{2}l \end{bmatrix}$$

當 θ 轉動為 4π 時 W 轉回原位，而這時向量 V 轉兩周，W 為向量 V 的二重覆蓋。

Euler 所找到的這種轉動群的新表示，即轉動群 O(3)的旋量表示。

[物理學家用微分幾何] 侯伯元 p.353

§ 02 把 relativistic energy-mass equation $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ 開根號是甚麼意思？

開根號在這裡是比喻性的說法，指的是 Dirac 試圖將上述的 E^2 方程式轉換為一個線性於 E 的方程式。為什麼需要這樣做？

這方程式是從愛因斯坦的質能等價原理推導出來的，適用於高速（相對論性）

粒子。其中 $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

在量子力學中，能量 E 和動量 p 是算符 (operators)： $E \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ， $p \rightarrow -i\hbar \nabla$

得到 Klein-Gordon equation

$$\hbar^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = m^2 c^2 \psi$$

Dirac 的突破在於，他引入了一組特殊的矩陣（稱為 Dirac 矩陣）來表示這個平方根操作。

Dirac 1928：

$$i\hbar(\gamma_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3})\psi = mc\psi$$

$$\text{其中 } \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma_k = -\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_i \text{ 稱為 Pauli 矩陣。}$$

$$\gamma_0^2 = I, \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -I, \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu \text{ for } \mu \neq \nu$$

假設存在矩陣 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ ，使得能量 $E = c\alpha \cdot p + \beta mc^2$

其中 $\alpha \cdot p = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z$ ， β 是另一個矩陣，使得

$(c\alpha \cdot p + \beta mc^2)^2 = E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$ 展開必須滿足反對易關係(anticommutation relations)

展開後，可以推導出矩陣必須滿足：

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \text{ (當 } i \neq j \text{ 時， } \alpha_i, \alpha_j \text{ 反對易；當 } i=j \text{ 時， } \alpha_i^2 = 1 \text{)}$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\beta^2 = 1$$

Dirac 發現，要滿足這些反對易關係， α 與 β 必須是 4×4 矩陣。這意味著波函數 ψ 不再是單一成分，而是有四個分量的旋量 (spinor)：

將量子算符代入 ($E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, p \rightarrow -i\hbar \nabla$)，就得到完整的 Dirac 方程：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi \text{ 或者寫成更緊湊的形式：}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

其中 Hamiltonian 算符 $H = c\alpha \cdot p + \beta mc^2$ 且 $p = -i\hbar \nabla$

設 $x_0 = ct$ ，Dirac 方程寫成：

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi = mc\psi, \text{ 其中 } \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$\psi(x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ 稱為 Dirac spinor。

Dirac spinor $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix}$ ， φ_R, φ_L 是 Pauli spinors (稱為二分量旋量)

$\varphi_R = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{C}$, χ_1 表示粒子處於自旋向上的機率振幅。 χ_2 表示粒子處

於自旋向下的機率振幅。

$$\text{滿足 } |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$$

Pauli spinors 的自旋觀測量透過 Pauli 矩陣作用，對應的自旋算子為

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, i=1,2,3$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$$

$$\text{例如 沿 } x \text{ 軸向上的自旋態： } \chi_{+x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{沿 } y \text{ 軸向上的自旋態： } \chi_{+y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Pauli spinor $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ 寫成 $\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$ 則形成 $M(2, \mathbb{C})$ 的左理想 S ：

$$\text{即 } U \in M(2, \mathbb{C}), \varphi \in S \Rightarrow U\varphi \in S$$

$$\text{KG 方程寫成這樣： } (\square + m^2)\Psi = 0$$

$$\text{其中 } \square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu$$

$$\text{Dirac 方程 } (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad \text{其中 } i\gamma^\mu \partial_\mu - m = D$$

$$DD' = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = -\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - m^2 = -\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu - m^2$$

$$= -\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2 = -(\square + m^2)$$