

§ Energy momentum equation [Spinor401-2]

能量動量方程式的核心概念來自於愛因斯坦的狹義相對論。

狄拉克在1928 年的重大成就是狄拉克方程（Dirac equation），其目標是將量子力學與狹義相對論結合。

1. 當時已知的量子波動方程（如薛丁格方程）是非相對論性的，而克萊因-戈爾登方程（Klein - Gordon equation）雖是相對論性的，但存在負機率等問題。
2. 狄拉克試圖找到一個線性的（對時間和空間微分均為一次）、且能自然地導出自旋概念的相對論性量子方程
3. 他從能量動量關係 $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$ 出發，但為了得到線性方程，他引入了矩陣（而非簡單的平方根運算），從而推導出狄拉克方程：

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$$

§

1. Relativistic energy

$$E=mc^2, m=\gamma m_0, \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta}}, \beta=(\frac{v}{c})^2, m_0 \text{ is the rest mass}$$

$$E_0 = m_0 c^2$$

2. Relativistic momentum

$$p = mv = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta}}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta} \dots (1)$$

$$p = \gamma m_0 v \Rightarrow p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\beta}$$

$$p^2 c^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1-\beta} \dots (2)$$

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4 - m_0^2 v^2 c^2}{1-\beta} = \frac{m_0^2 c^2 (c^2 - v^2)}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$$

§

1. 普適性：式子中不含速度。
2. 包含了 E, m, p

3. 靜止時， $E = m_0 c^2$ 表示物質的質能互換。
4. $m_0 = 0$ 時， $E = pc$ 表明光子的性質