§ SO(2)的表現理論 [Spinor201-4]

先看一下一維圓環S^1的譜：

1. 用 Dirac 算子

$$D=-i\frac{d}{dt},D\psi=\chi\psi \quad \text{得到}\psi(x)=Ce^{i\lambda x}$$

$$Spec(D)=\{...,-2,-1,0,1,2,...\} \quad \psi_n(x)=e^{inx}$$

2. 用 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta=-\frac{d^2}{dx^2} \quad -\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u \quad \cdots\text{[Spec303-1]}$$

因為 SO(3)比較複雜，所以我先問 SO(2)。

得到的答案是：

SO(2)的不可化約表示由$n\in Z$ 標記$\rho_n(\theta)=e^{in\theta}$，然後

考慮S^1上的函數$f(\phi)$

SO(2)的作用是$(R_\theta f)(\phi)=f(\phi-\theta)$ Fourier 展開$f(\phi)=\sum_{n\in Z}a_n e^{in\phi}$

每個$span\{e^{in\phi}\}$都是 SO(2)的不可化約表示。

SO(2)的 irrep=Fourier 模態。

用 Lie alebra 的角度看：$J\to in$

SO(2)的 Lie algebra so(2)只有一個生成元 J，在表示中$J\to in$

指數化$e^{\theta J}=e^{in\theta}$

SO(2)在R^2上的不變子空間只有{0}，R^2，所以 SO(2)在R^2上是不可化約的。

(在 C 上可分解為兩個一維的不可化約表示$e^{\pm\theta}$)

還是不懂！但是一直看到$e^{i\theta}$，就回到S^1上的 Dirac 譜：

$$S=\left\{e^{ix}\middle|x\in R\right\}$$

H：S 上平方可積的函數，是 Hilbert 空間

$\{e^{inx}\}$構成 H 的標準正交基，$f(\phi)\in H$展開成 Fourier 級數。

$SO(2)\cong S^1$，因此 SO(2)上的表示理論本質上就是圓S^1上的譜理論(Fourier spectral theory)

$\theta\to e^{i\theta}$

$\chi_n(e^{i\theta})=e^{in\theta},n\in Z$ 這裡的 n 就是(1)SO(2)的權重 (2) S^1的頻率 (3) 譜指標

Gemini 做一個結論：

因為$SO(2)\cong S^1$，其不可化約表示正是$L^2(S^1)$上旋轉生成元$-i\frac{d}{d\theta}$的離散譜；權重 m 就是圓上的 Fourier 頻率。

SO(2)的表示理論就是 Fourier 分析，把圓的譜升級到球的譜就是 SO(3)的表示。

就舉一個物理的例子。在單粒子模型中,單電子的軌道波函數生成正交群 SO(3)的表示, 它的自旋波函數生成酉群 SU(2) 的表示。物理學家用 SO(3) 的十維表示, 他們當時 找到了九個粒子, 認為如果有 10 個粒子就構成了十維的表示。於是,他們預言 **Ω**-粒子的存在, 這件事情在 1964 年被實驗證實。
這是怎麼回事？
答案是這樣的：
SU(3)有一個十維不可約表示(十重態)，其中 9 個重子在 1960 年初已被發現，群論的結構要求該表示必須有另一個，Gell-Mann 預言了具有奇異數-3 的Ω^-粒子(由三個奇夸克組成)，此粒子於 1964 年被實驗確認。
所以，故事是對的，主角不對。