

§ SO(3)

$$M[R_x(\alpha)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad M[R_y(\beta)] = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$M[R_z(\gamma)] = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_x = \left[\frac{dM[R_x(\alpha)]}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ is the corresponding infinitesimal rotation.}$$

$$\text{Similarly, } L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L_x 的幾何意義：

1. 無窮小旋轉的操作

L_x 是繞 x 軸的無窮小旋轉生成元，它生成繞 x 軸的旋轉，是 SO(3) 的 Lie algebra 的基元素，並與角動量密切相關。

具體來說，對於一個無窮小角度 $\delta\alpha$ ，繞 x 軸的無窮小旋轉可以表示為：

$$R_x(\delta\alpha) \approx I + \delta\alpha \cdot L_x$$

2. 李代數 so(3) 的元素

L_x 是特殊正交群 SO(3) 對應的李代數 so(3) 的一個基元素。so(3) 由所有 3x3 反對稱矩陣（即滿足 $A^T = -A$ ）組成，而 L_x 正是這樣一個矩陣。

3. 與角動量的關係

在物理中， L_x 對應於繞 x 軸的角動量算符的矩陣表示（在量子力學中，角動量算符與旋轉生成元密切相關）。

4. 切向量的作用

從流形角度，SO(3) 是一個李群， L_x 是單位元處（即恆等旋轉）的切空間中的一個切向量。它描述了從恆等旋轉出發，沿繞 x 軸旋轉方向的速度。

5. 指數映射

通過指數映射（exponential map），可以從 L_x 得到有限角度的旋轉：

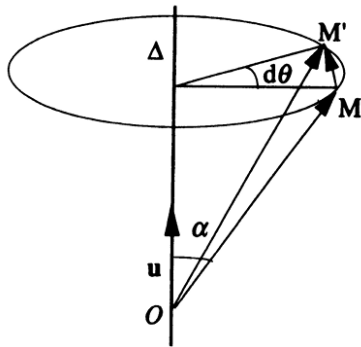
$$R_x(\alpha) = \exp(\alpha L_x), \text{ 這將李代數 so(3) 中的元素映射回李群 SO(3).}$$

§ Properties of the Infinitesimal Matrices

$$L_x L_y - L_y L_x = L_z, L_y L_z - L_z L_y = L_x, L_z L_x - L_x L_z = L_y$$

$$M[R_x(\alpha)] = \exp(\alpha L_x), \dots$$

§ Rotation about a given axis



Given axis Δ passing through the origin of the reference system.

§ Irreducible Representations of SO(3)

研究 SO(3) 的表示，就是研究一個群如何作用在一個向量空間上（通常是複向量空間），並保持群結構。

很難懂，暫略！