§ SO(3)旋轉群與其李代數 [Spinor201-1]

一. SO(2)：平面的旋轉群

通常以 $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$表現

A(θ) 在 θ=0 展開$=I+A^{'}(0)\theta+\dfrac{A^{''}(0)}{2!}\theta^2+\dfrac{A^{'''}(0)}{3!}\theta^3+\ldots$

$\theta\approx\varepsilon$, $A(\varepsilon)\approx I+A^{'}(0)\varepsilon$ 令 $A(\varepsilon)\approx I+i\varepsilon X$,其中 $X=-iA^{'}(0)$

$X=-iA^{'}(0)=-i\dfrac{d}{d\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0}=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}=-\sigma_y$ (Pauli matrix，$\sigma_y^2=I$)

$$e^{i\theta X}=I+i\theta X+\frac{(i\theta X)^2}{2!}+\frac{(i\theta X)^3}{3!}+\frac{(i\theta X)^4}{4!}+\ldots$$

其中 $iX=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$(iX)^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$

$$=I(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-..)+iX(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\ldots)=I\cdot\cos\theta+iX\sin\theta$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cos\theta+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sin\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

其中 $X=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$稱為 SO(2)的 Lie Algebra so(2)的 generator，包含了 SO(2)的所有性質。

二. SO(3)旋轉矩陣與無窮小生成元

三維旋轉矩陣可以分別繞x,y,z 軸表示為：$R_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$，

$R_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ o & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}$，$R_z(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$L_x=[\dfrac{dR_x(\alpha)}{d\alpha}]\Bigg|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，同理 $L_y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}, L_z=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

它們滿足指數映射關係：$R_x(\alpha)=e^{\alpha L_x}$ ，$R_y(\beta)=e^{\beta L_y}$ ，$R_z(\gamma)=e^{\gamma L_z}$

其中L_x, L_y, L_z是 Lie algebra so(3)的無窮小生成元(infinitesimal generators)，滿足

$[\mathrm{L}_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k \quad ([L_x, L_y] = L_z, [L_y, L_z] = L_x, [L_z, L_x] = L_y)$

$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -y\partial_x + x\partial_y$ 是 S^2 上的

Killing vector field。

Symmetry and Lie algebra

We expect S^2 to have symmetry under the action of SO(3)。

$Z = -y\partial_x + x\partial_y = \partial\varphi$， $X = -z\partial_y + y\partial_z$ ，let $[Z,X] = -z\partial_x + x\partial_z = Y$

Then $[X, Y] = Z, [Y, Z] = X$

Span{X, Y, Z} = Lie algebra so(3)，

X、Y、Z are the Killing fields that generate so(3)。 [N3404KillingVector]

三. so(3)的幾何與物理意義

1. 無窮小旋轉生成元

   對於無窮小角度$\delta\alpha$ ，繞x 軸的旋轉可近似為： $R_x(\delta\alpha) \approx I + \delta\alpha \cdot L_x$

   L_x是繞x 軸的角動量算符的矩陣表示，在量子力學中與旋轉算符緊密相關。

2. 切空間與指數映射

   從流形角度看，SO(3) 是一個李群，L_x是單位元處的切向量，描述了繞x軸旋轉的「速度」。通過指數映射： $R_x(\alpha) = \exp(\alpha L_x)$ ，可將李代數元素映射回李群元素。

3. 李代數與李群的結構比較

   李群包含全局信息（包括拓撲），結構更幾何化但更複雜。
   李代數捕捉局部結構，雖丟失全局拓撲信息，但其線性性質便於代數分類與表示論分析。

四. SO(3)旋轉矩陣的特徵值問題

三維旋轉矩陣$R \in SO(3)$的特徵值為： $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\theta}, \lambda_3 = e^{-i\theta}$

跡與旋轉角度的關係為： $Tr(R) = 1 + 2\cos\theta$

五. 量子力學中的旋轉算符

在量子力學中，旋轉操作使用么正算符表示：$U(\hat{n},\theta)=\exp(-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{J}$

其中$\vec{J}=(J_x,J_y,J_z)$為角動量算符（軌道或自旋）。該算符在角動量本徵態

$|j,m\rangle$下的特徵值為$e^{-im\theta}$ 。

六. SU(2)與 SO(3)的關係

SU(2) 是 SO(3) 的二重覆蓋群，兩者局部同構，且共享相同的李代數 $su(2)\cong so(3)$ 。

su(2)的一組基為$-\frac{i}{2}\sigma_1,-\frac{i}{2}\sigma_2,-\frac{i}{2}\sigma_3$ 其中σ_i為 Pauli 矩陣。它們給出 SO(3) 的一個二維旋量表示。

su(2)抽象的定義，它是由三個生成元J_x,J_y,J_z組成，滿足

$[J_x,J_y]=iJ_z,[J_y,J_z]=iJ_x,[J_z,J_x]=iJ_y$

$$\rho(J_x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\rho(J_y)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\rho(J_z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

這組矩陣顯然構成 su(2)的一個二維表示。

七. 從李群表示到李代數

若$\Phi:G\to GL(V)$ 是李群 G 的表示，則可通過微分得到李代數表示：

$\phi(X)=\frac{d}{dt}\Phi(\exp(tX))\big|_{t=0}$ 滿足指數關係：$\Phi(\exp(X))=(\phi(\mathrm{X}))$

例如對於 SO(2)

SO(2) 的旋轉矩陣為$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 其對應的李代數 so(2)的一個生成元為：$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 滿足$so(2)=\{\theta A|\theta\in R\}$

$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\exp(\theta A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta A)^k}{k!}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 這很容易驗證。

通過指數映射得到旋轉矩陣：$\exp(\theta A)=R(\theta)$

微分映射關係為：$\frac{d}{d\theta}R(\theta)\big|_{\theta=0}=A$

對於 SO(3)，三個生成元X_1,X_2,X_3滿足：$[X_i,X_j]=iC_{ij}^kX_k$

結構常數與角動量對易關係一致。

八. 應用與公式

(1) 伴隨表示

已知 R $\in$ SO(3)，對於任何向量 $\omega \in R^3$，其伴隨表示滿足 $R\hat{\omega}R^T = \widehat{R\omega}$，

其中 $\hat{\cdot}$ 將向量映射為反對稱矩陣。

(2) 通過指數映射，也就是 Rodrigues' Formula(Ivory-Jacobi formula)，我們能把 so(3) 中的旋轉向量對應至 SO(3) 中的一個旋轉矩陣。

九. 拓撲性質

在拓撲學中，SO(3) 與實投影空間 RP^3 同胚，其基本群為：$\pi_1(SO(3)) \cong Z_2$

總結

SO(3) 作為三維旋轉群，其李代數so(3)提供了局部結構的線性描述，並通過指數映射與李群相連。SU(2) 為其二重覆蓋，在量子力學中尤為重要。兩者在物理、幾何與表示論中具有核心地位。

§ 習作

1. 在線性代數與群論中，一個實數方塊矩陣 A 屬於 SO(3)群的充要條件為何？
2. 已知一個 SO(3)旋轉矩陣 R 的跡（Trace）為 Tr(R)=0。
   根據跡與旋轉角度θ的關係式$Tr(R) = 1 + 2\cos\theta$，請問此矩陣對應的旋轉角度θ為多少？
3. 關於 SO(3)群與其對應的李代數 so(3)，以及與 SU(2)群的關係，下列敘述何者正確？
4. 若一個旋轉矩陣$R \in SO(3)$滿足$R^T = R$，且$R \neq I$，則此旋轉矩陣對應的旋轉角度θ必為多少？
5. 利用羅德里格旋轉公式（Rodrigues' Rotation Formula），若旋轉向量為$\omega = \theta k$（其中 k 為單位方向向量），則旋轉矩陣 R 可以表示為？
6. 在拓撲學中，SO(3)的基本群（Fundamental Group）$\pi_1(SO(3))$為何？這說明了什麼性質？
7. 已知$R \in SO(3)$，對於任何向量$\omega \in R^3$，伴隨表示（Adjoint representation）滿足$R\hat{\omega}R^T = \hat{\phi}$，則向量$\phi$為何？
8. 給定李代數生成元L_x, L_y, L_z滿足$[L_x, L_y] = L_z$，則矩陣$\exp(tL_z)$代表什麼？

解答

1. $A^T A = 1, \det(A) = 1$
2. 120^0
3. SU(2)是 SO(3)的二重覆蓋群，且兩者共享相同的李代數結構。
4. 180^0 $R^2 = I$ 可以推出 $\lambda^2 = 1$ 。三個特徵值為 1,-1,-1。

   $tr(R) = 1 + 2\cos\theta = -1, \Rightarrow \theta = 180^0$

5. $R = 1 + \sin\theta \hat{K} + (1 - \cos\theta) \hat{K}^2$
6. Z_2 SO(3)與 RP^3 同胚，其基本群為二階循環群，這也是量子力學中自旋 1/2 費米子的物理基礎。
7. $R\omega$
8. 繞 z 軸旋轉 t 弧度的旋轉矩陣