§ Clifford product

(1) $ab = a \bullet b + a \wedge b$

(2) $\nabla F = \nabla \bullet F + \nabla \wedge F$ $\nabla \bullet F$ 是內積、散度；$\nabla \wedge F$ 是外積、旋度。

$\nabla \wedge F = \frac{1}{2}(\nabla F + \tilde{F}\nabla), \nabla \bullet F = \frac{1}{2}(\nabla F - \tilde{F})$ $\tilde{F}$ 是 F 的反序(reverse)

例 在 cl_3

$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} + e_3 \frac{\partial}{\partial z}$ 設 $F = x(e_2 \wedge e_3) = xe_2e_3$

$\nabla F = (e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} + e_3 \frac{\partial}{\partial z})(xe_2e_3) = e_1e_2e_3$

$\nabla \bullet (e_2e_3) = (\nabla \bullet e_2)e_3 - (\nabla \bullet e_3)e_2 = \frac{\partial}{\partial y}e_3 - \frac{\partial}{\partial z}e_2$ $\nabla \bullet F = (\nabla \bullet (e_2e_3))x = 0$

$\nabla \wedge F = (\nabla \wedge e_2e_3)x = e_1e_2e_3$

§ Reflection

在 Clifford 代數中，$a^2 = aa = |a|^2$

$a_{\|}$表示 a 在 b 的投影，$a_{\perp} = a - a_{\|}$，$b^{-1} = b/|b|^2$

則$a_{\|} = (a \bullet b)\frac{b}{|b|^2} = (a \bullet b)b^{-1}$

$a_{\perp} = a - a_{\|} = a - (a \bullet b)b^{-1} = (ab)b^{-1} - (a \bullet b)b^{-1} = (a \wedge b)b^{-1}$

r'是 r 對 a 的反射(reflection)

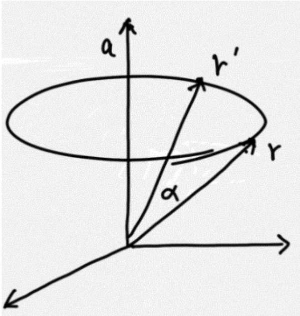
$r' = r_{\|} - r_{\perp} = (r \bullet a)a^{-1} - (r \wedge a)a^{-1} = (r \bullet a - r \wedge a)a^{-1} = (a \bullet r + a \wedge r)a^{-1} = ara^{-1}$

§ Rotation

A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 則

(1) $e^{tA} = R(t), \frac{d}{d\theta}R(\theta)\big|_{\theta=0} = A$

(2) Clifford product $ab = a \bullet b + a \wedge b$



A spatial rotation of r around the axis a by the angle α

(取 a 為 unit vector) is $r' = Rr\tilde{R}$ where

$R = \cos\frac{\alpha}{2} - Ia\sin\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{\alpha}{2}Ia}$ 稱為 rotor(旋轉子)，Ia 是 bivector，代表旋轉平面（垂直於軸 a 的平面）。

$\tilde{R} = \cos\frac{\alpha}{2} + Ia\sin\frac{\alpha}{2}$ (R 的反轉 reversion)

例 P(1，2，1)繞 z 軸旋轉 90^0 $\rightarrow (-2,1,1)$

古典作法為 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 或者 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Clifford algebra 的作法

假設在三維幾何代數中，我們想將向量 r 繞 z 軸旋轉 α 角度。令軸 $a = e_3$（單位向量沿 z 軸），偽純量 $I = e_1e_2e_3$（其中 e_1, e_2, e_3 是正交基向量）。則雙向量為 $Ia = e_1e_2$。

$R = \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}(e_1e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e_1e_2)$ ，$\tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e_1e_2)$ ，$v = e_1 + 2e_2 + e_3$

$v' = Rv\tilde{R} = \ldots = -2e_2 + e_2 + e_3$

§ 這個 rotor 是怎麼來的？

在幾何代數中，旋轉可以表示為兩個連續的反射。

設我們要繞軸 a（單位向量）旋轉角度 α。

選擇兩個反射平面，它們的法向量分別為 m 和 n，且：

- m 和 n 都垂直於旋轉軸 a
- m 和 n 之間的夾角為 $\alpha/2$

在垂直於 a 的平面內，我們可以選擇：

- m 為任意垂直於 a 的單位向量
- $n = m\cos\frac{\alpha}{2} + b\sin\frac{\alpha}{2}$，其中 b 是垂直於 m 和 a 的單位向量

現在計算旋轉子：

$$R = nm = (m\cos\frac{\alpha}{2} + b\sin\frac{\alpha}{2})m = mm\cos\frac{\alpha}{2} + bm\sin\frac{\alpha}{2}$$

由於 m 是單位向量，$mm = 1$。另外，$bm = -mb$（因為 b 和 m 垂直），且 mb 是一個雙向量。

令 $B = mb$，這是垂直於旋轉軸的平面對應的雙向量。在三維空間中，$B = Ia$，其中 I 是偽純量。

因此：

$$R = \cos\frac{\alpha}{2} - B\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} - Ia\sin\frac{\alpha}{2}$$

由於 $(Ia)^2 = -1 (\because I^2 = -1, a^2 = 1)$ 我們可以有指數形式 $R = e^{-Ia\frac{\alpha}{2}}$

為什麼是半角 $\dfrac{\alpha}{2}$ ？

- 兩個反射的組合產生一個旋轉
- 旋轉角度是兩個反射平面之間夾角的**兩倍**
- 因此，要得到旋轉角度 α，反射平面之間的夾角必須是 $\alpha/2$

§ Pauli matrices

$$\mathrm{X}(\mathrm{O}x) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X(Oy) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, X(Oz) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

其中 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是 Pauli 矩陣

例如 $A = -\frac{i}{2}\sigma_z$ ，$e^{\theta A} = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_z} = R_z(\theta)$ 是繞 z 軸旋轉 θ 的酉算符。