

§ The heat equation and index theory

M is a compact Riemannian manifold

Δ is a self-adjoint Laplace-type operator acting on the section of a Riemannian or Hermitian vector bundle E

$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\varphi_t = 0$ is the heat equation, where φ_t is a smooth section in E

$k(t, x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} \varphi_j(x) \otimes \varphi_j^*(y)$ is the kernel of Δ on M

向量叢 (E) ：可以想像成在流形 M 的每一點 x 上都「黏」上一個向量空間（例如一個 k 維的實數或複數空間）。這使得我們可以在彎曲的空間上定義「向量場」或更一般的「截面」。

拉普拉斯型算子 Δ ：這是我們熟悉的平坦空間中拉普拉斯算子 ∇^2 在流形上的推廣。它作用在向量叢 E 的截面上。它是自伴的，這是一個非常重要的性質，意味著它對應的無限維空間可以進行「正交分解」，就像有限維空間中的對稱矩陣一樣。

解讀熱核公式：

特徵函數展開：由於 Δ 是自伴的，根據譜定理，存在一組完備的**正交歸一**的函數基底 $\{\varphi_j\}$ （特徵函數），以及對應的非負實數 $\{\lambda_j\}$ （特徵值），使得：

$$\Delta \varphi_j = \lambda_j \varphi_j$$

這就像將一個振動分解成其基本頻率一樣。

- $k(t, x, y)$ 可以被理解為在 $t = 0$ 時刻，在 y 點注入一個單位熱量（一個「狄拉克 δ 函數」），那麼在經過時間 t 後，在 x 點觀察到的溫度分布。
- 公式中的 $e^{-\lambda_j t}$ 項代表了高頻率（大特徵值 λ_j ）的振動模式會隨著時間快速衰減，這與我們的物理直覺一致：局部的、劇烈的溫度起伏會先被「熨平」。

合成 $\otimes$ ：這表示 $k(t, x, y)$ 是一個從 y 點的向量空間到 x 點的向量空間的線性映射。

相關的重要定理：

1. 熱核的存在性與唯一性
2. 熱核的漸近展開(Minashisundaram-Pleijel 漸近展開)
3. 熱核與譜(跡)的關係

對熱核的時空跡進行積分： $Z(t) = \int_M \text{tr}(k(t, x, x)) dx = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}$ (稱為熱跡)。

1. 當 $t \rightarrow 0^+$ ，利用定理2的漸近展開，我們可以得到流形的全局幾何不變量，例如**總體積**、**總純量曲率**等。
2. 當 $t \rightarrow \infty$ ，主導項是 $e^{-\lambda_1 t}$ ，這給出了算子的**最小特徵值 λ_1** 的資訊。
3. 熱跡包含了算子的所有譜資訊，這導致了著名的說法：「**熱核聽到了譜的形狀**」。

利用熱跡的漸近行為，可以推導出著名的 **Weyl 定律**，它描述了特徵值的分布情況：

$$N(\lambda) \sim \frac{\omega_n \text{Vol}(M)}{(2\pi)^n} \lambda^{n/2} \quad \text{當 } \lambda \rightarrow \infty$$

其中 $N(\lambda)$ 是小於 λ 的特徵值的個數。這說明了特徵值的增長速率僅由流形的**維度**和**體積**決定。
總結：

1. **熱核**本身是熱方程的**基本解**。
2. 當時間很短時，它的行為（**漸近展開**）揭示了流形的**局部幾何**（曲率）。
3. 對它進行積分得到的**熱跡**，則揭示了算子的**全域譜資訊**（特徵值），並與**全域幾何**（如體積）相關。

§

熱核理論與自旋幾何的聯繫是現代數學物理的核心之一，其橋樑就是 Atiyah-Singer Index 定理。

簡單來說，熱核為我們提供了一個強大的計算工具，可以從分析的角度去捕捉和計算自旋幾何中產生的拓撲不變量。



後面有非常多期待理解的東西