

§ 01 Maxwell 方程

§ 02 在 Clifford 代數框架下的 Maxwell 方程，電磁場的統一

§ 03 電磁場是 Lorentz invariant

§ 04 Dirac 流

§ 05 Dirac 流與古典電磁場的耦合

§ Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \rho \text{ 是電荷密度}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} \text{ 是電流密度}$$

§ 在 Clifford algebra 框架下的 Maxwell 方程

在 space-time 代數中， $F = E + I\mathbf{B}$ ， $I = \mathbf{e}_{123}$ ，其中 E 是電場、 B 是磁場。

$$\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F \quad (\text{像 } ab = a \cdot b + a \wedge b)$$

$$\text{可推出} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \bar{\mathbf{J}} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

在 Clifford algebra 中，時空導數算子 $\nabla = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_x$, $\nabla_x = \mathbf{e}_1 \partial_x + \mathbf{e}_2 \partial_y + \mathbf{e}_3 \partial_z$

(電磁場的 *d'Alembert* 算子 $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$)。

先說明 $\nabla \wedge E = I(\nabla \times E)$ where $I = \mathbf{e}_{123}$:

這是 Clifford 代數中的表達方式

$$\nabla \text{ 是向量微分算子，即 } \nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3$$

$$\nabla \wedge E = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \dots \text{ 是外積, } \nabla \times E = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \dots \text{ 是旋度}$$

$$I = \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \text{ 是單位偽純量, } I\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, I\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, I\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$$

這個等式說明在 3D 中，外積與旋度本質上是同一幾何對象的不同表示：

$\nabla \wedge E$ 是二重向量(面積元素方向與旋轉平面相關)

$\nabla \times E$ 是軸向量(垂直於該平面)

它們通過偽純量 I (體積元素) 互相轉換。

$$\begin{aligned}\nabla F &= (\partial_t + \nabla)(E + IB) = \partial_t(E + IB) + \nabla(E + IB) \\ &= \partial_t E + I \partial_t B + \nabla \cdot (E + IB) + \nabla \wedge (E + IB) \\ &= \partial_t E + (\nabla \cdot E + \nabla \wedge E) + I(\partial_t B + \nabla \cdot B) + I(\nabla \times B) \\ &= \partial_t E + \nabla \cdot E + I(\nabla \times E) + I \partial_t B + I(\nabla \cdot B) + \nabla \times B, \quad I^2 = -1 \\ &= \nabla \cdot E + (\partial_t E - \nabla \times B) + I(\partial_t B + \nabla \times E) + I \nabla \cdot B\end{aligned}$$

注意到 $\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla$ 這兩個 ∇ 是不同的。

又 $\nabla F = J = \rho - \vec{J}$ ($\nabla F = J$ 是將傳統馬克士威方程重寫為幾何代數形式的結果，可視為電動力學的基本公理。其中 J 是 4 維電流密度。)

$$\langle \nabla F \rangle_0 = \nabla \cdot E = \rho \quad (\text{純量})(\text{高斯定律})$$

$$\langle \nabla F \rangle_1 = \partial_t E - \nabla \times B = -\vec{J} \quad (\text{安培-Maxwell 定律})$$

$$\langle \nabla F \rangle_2 = I(\partial_t B + \nabla \times E) = 0 \Rightarrow \nabla \times E = -\partial_t B \quad (\text{法拉第定律})$$

$$\langle \nabla F \rangle_3 = I(\nabla \cdot B) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot B = 0 \quad (\text{高斯磁定律})$$

這些方程分別對應 ∇F 的純量部分、向量部分、雙向量部分、和三向量部分。

因此，Clifford algebra 成功地將電場和磁場統一在一個幾何物件 F 中，並且用一個方程來表示所有電磁現象。這種表述方式不僅簡潔，也具有更清晰的幾何意義。所以到這裡，我們把電磁場統一了。

§ 電磁場的 Lorentz 變換

Maxwell 方程式具有 Lorentz 不變性(電磁場是 Lorentz invariants)

§ Dirac current $J(x)$

$$J^\mu(x) = c \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad \text{其中}$$

1. $\psi(x)$ 是一個四分量 Dirac 旋量場
2. $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$ 是伴隨(adjoint)旋量場， $\bar{\psi} = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, -\psi_3^\dagger, -\psi_4^\dagger)$

3. γ^μ 是 Dirac 矩陣
4. Dirac current 在 Lorentz 變換下是個不變量。

由 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ 可推出 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，即 J^μ 滿足局域守恆律。

$\partial_\mu J^\mu = 0$ 將四個維度展開，就是連續方程： $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

§ 用 Clifford 代數與幾何代數的語言，從 Dirac 旋量出發，構造與古典電磁流中的電流的對偶結構：

Dirac 矩陣 γ^μ 滿足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ 其中 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ 是 Minkowski 時空度規。

$$\nabla = \gamma^\mu \partial_\mu$$

Dirac current $J^\mu = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 轉譯為 Clifford 向量元 $J = J^\mu \gamma_\mu = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\gamma_\mu$

古典電磁場用 bivector 表示 $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu$

Maxwell 方程中源項即為 $\nabla = J$ 這裡 J 是四維電流密度向量元。

Dirac 旋量 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ ， $\psi_i \in \mathbb{C}$

伴隨旋量 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\gamma^0$

電流時間分量 $J^0 = c\bar{\psi}\gamma^0\psi = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = c\bar{\psi}\psi = c\sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2$

電流空間分量 $J^i = c\bar{\psi}\gamma^i\psi = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi, i=1, 2, 3$

旋量分成上下兩部分 $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ ，其中 $\phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

得 $J^i = c(\phi^\dagger \sigma^i \chi + \chi^\dagger \sigma^i \phi)$

此即為 Dirac 電流各分量從旋量分量給出的具體矩陣表示。

§ 物質產生電磁場，電磁場影響物質場：

1. Dirac 場 $\psi(x)$ 透過 $J^\mu = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 產生電流 J^μ
2. 這個電流 J^μ 作為源，透過 $\nabla F = J^\mu$ 產生電磁場 F(及其對應的四維勢 A_μ)
3. 電磁場勢 A_μ 透過耦合後的 Dirac 方程影響 $\psi(x)$ 的演化。

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi = 0$$

這兩個方程構成一個自洽(self-consistent)的系統。

§ 相關事項

1. Dirac 方程的研究重點

- Dirac方程的解結構與性質

深入理解平面波解、自旋本徵態、粒子與反粒子的分離，學習標準解的物理意義及數學技法。

- 量子場論中的狄拉克場量子化

探索狄拉克場的反交換子關係、費米子場的建立及其正則量子化過程，理解電荷、粒子數守恒等基礎結構。

- 狄拉克算符與幾何結構

特別是狄拉克算符在Riemann流形和Spin結構下的定義，研究其頻譜、指標定理及在幾何分析中的應用。

- 狄拉克電流的守恆與對稱性

從Noether定理出發，研究電流守恆、U(1)鍊對稱性、規範耦合場與電磁場交互作用。

- 狄拉克方程在Curved Spacetime中的推廣

理解狄拉克方程在廣義相對論背景下的修正，Spin連接與引力耦合，對黑洞物理及宇宙學重要。

- Dirac方程與量子拓撲學的連結

研究狄拉克態在拓撲絕緣體、自旋霍爾效應中的角色，利用數學物理方法理解量子態的拓撲性。

2. 怎樣用共軛旋量驗證電荷守恆

1. 定義Dirac電流

Dirac電流為

$$J^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

其中 $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ ，是一個共軛旋量。

2. 取共軛旋量

- 共軛旋量及其導數

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

- Dirac方程和共軛方程

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0,$$

$$\partial_\mu\bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu) + mc\bar{\psi} = 0.$$

3. 對 J^μ 做偏微分

計算電流的散度：

$$\partial_\mu J^\mu = c [(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi)]$$

4. 代入Dirac方程

由於

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0,$$

$$\partial_\mu \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu) + mc\bar{\psi} = 0,$$

將這兩個關係代入後可得：

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

3. 從拉格朗日到電流的完整推導

1. 狄拉克場拉格朗日密度

考慮四分量Dirac旋量場 $\psi(x)$ 及其伴隨旋量 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ，定義拉格朗日密度為

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}(x) (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc) \psi(x).$$

此為自由費米子Dirac拉格朗日，其中：

- $\hbar$ 是約化普朗克常數，
- c 是光速，
- m 是費米子質量，
- γ^μ 是滿足Clifford代數關係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ 的Dirac矩陣。

2. 狄拉克方程

拉格朗日密度對 $\bar{\psi}$ 變分得Euler-Lagrange方程，即Dirac方程：

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc) \psi = 0.$$

對 ψ 變分亦可得到伴隨方程

$$\partial_\mu \bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu) + mc\bar{\psi} = 0.$$

3. Noether 電流與定義

本拉格朗日 $\mathcal{L}$ 對 $U(1)$ 位相變換對稱： $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ ，根據 Noether 定理，對應的守恒電流為

$$J^\mu = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

稱為 Dirac 電流。

4. 電流守恒律推導

對電流取散度

$$\partial_\mu J^\mu = c \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = c [(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi)].$$

利用 Dirac 方程及其共軛方程代入：

$$\begin{cases} (i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0 \\ \partial_\mu \bar{\psi} (i\hbar \gamma^\mu) + mc \bar{\psi} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\partial_\mu J^\mu = c \frac{1}{i\hbar} (-mc \bar{\psi} \psi + mc \bar{\psi} \psi) = 0.$$

6. 補充說明：電流分量展開

設旋量分為上下兩兩分量組成

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

則各分量電流為

$$J^0 = c(\phi^\dagger \phi + \chi^\dagger \chi), \quad J^i = c(\phi^\dagger \sigma^i \chi + \chi^\dagger \sigma^i \phi),$$

其中 σ^i 為 Pauli 矩陣。

4. 用具體 gamma 矩陣寫出電流各分量

Dirac 矩陣 (標準表示)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

其中 I 是 2×2 單位矩陣， σ^i 是三個 Pauli 矩陣：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dirac 旋量分解

一般四分量旋量寫為上下兩部分：

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi, \chi \in \mathbb{C}^2.$$

旋量的共軛定義為

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\phi^\dagger, \chi^\dagger) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = (\phi^\dagger, -\chi^\dagger).$$