

§ Hermitian Vector Spaces

Hermitian 乘積 $x \bullet y = (y \bullet x)^*$ for $x, y \in S$

若 Hermitian product 是正定的，則稱 S 為 Hermitian 向量空間。

The classical Hermitian product :

For two spinors $x = (\psi, \phi), y = (\eta, \xi)$, the Hermitian product : $x \bullet y = \psi \eta^* + \phi \xi^*$

1. $x \bullet y = (y \bullet x)^*$
2. $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$
3. $(\lambda x) \bullet y = \lambda(x \bullet y)$ for a complex number λ
4. $x \bullet (\lambda y) = \lambda^*(x \bullet y)$
5. $x \bullet x \neq 0$ for all $x \neq 0$

若 $x \bullet y = 0$ 則仍然稱兩旋量 x, y 互相垂直。

Norm for a spinor $\|x\| = \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{\psi \psi^* + \phi \phi^*}$

假設 $e_1 = (\psi, \phi)$ 是一酉旋量，則 $e_2 = (-i\phi^*, i\psi^*)$ 是與 e_1 垂直的酉旋量，這可以簡單

驗證一下：

$$e_2 \bullet e_2 = 1$$

$$e_1 \bullet e_2 = 0$$

因此 $\{e_1, e_2\}$ 形成旋量向量空間的 orthonormal basis。