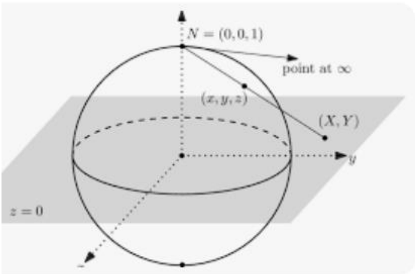
§ 立體投影將球面的點與西旋量聯繫起來



$x^2+y^2+z^2=1$

$P(x,y,z)\in S^2$，從北極 N(0,0,1)連接 P 的直線交 xy 平面於點$P'(u,v,0)$，則

$\dfrac{x}{u}=\dfrac{y}{v}=\dfrac{1-z}{1}=\dfrac{x+iy}{u+iv}=\dfrac{x-iy}{u-iv}$ ，

let $\xi=u+iv$ then $\xi=\dfrac{x+iy}{1-z}$

Set $\eta=\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ ， $x+iy=\xi(1-z)\to x-iy=\xi^*(1-z)$

$$x^2+y^2=\xi\xi^*(1-z)^2=1-z^2\Rightarrow\frac{1}{1-z}=\frac{|\xi|^2}{1+z}\Rightarrow z=\frac{|\xi|^2-1}{|\xi|^2+1}$$

$$2x=(\xi+\xi^*)(1-z)\Rightarrow x=\frac{\xi+\xi^*}{1+|\xi|^2}$$

同理 $y=\dfrac{-i(\xi-\xi^*)}{1+|\xi|^2}$

引入$\psi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ 其中$\xi_1,\xi_2\in C$

(DeepSeek 寫成$\psi=\dfrac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix}$，$P(\theta,\phi)$ 則$\xi=(\tan\dfrac{\theta}{2})e^{i\phi}$

因此$P\xrightarrow{\in S^2}\xi\to$任意滿足$\xi_1/\xi_2=\xi$的二維複向量$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$都代表 P 點所對應的自旋方向，這個對應不是唯一的。

事實上是複數向量空間C^2中穿過原點的一條複直線。

這個由所有旋量構成的空間在射影中稱為複射影直線CP^1，它在拓撲上正是一個二為球面。