§ Differential Operators on Manifolds

Examples

1. Gradient $gradv=\sum_i g^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$
2. Divergence $div(Y)=\sum_i\frac{\partial y^i}{\partial x^i}+\sum_{ij}\Gamma^i_{ij}y^j$ for $Y=\sum_i y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$
3. The exterior derivative d
4. Connection ∇
5. $\bar{\partial}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$ where z=x+iy
6. The Laplace-Beltrami operator $\Delta=-div$
7. Schrodinger 算子 $P=-h^2\Delta+V(x)$ 其主符號為 $\sigma_P(x,\xi)=-h^2|\xi|^2$

§ 主符號(Principal symbol) of a differential operator

Principal symbol 是偏微分算子在分析上的一個核心工具，特別在微局部分析、擴散現象的研究與橢圓性判斷中極為重要。

簡單來說，它抽取出一個微分算子最高階導數項的系數，並用切向量（ξ）代替偏導數來表示其"主導行為"。

定義

給定一個光滑流形 M 上的微分算子 $P=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D^\alpha$ ，那麼 P 的主符號是最高次項係數對應的符號函數 $\sigma_P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$

$x\in R^n$ ：Base point (position)

$\xi\in R^n-\{0\}$ ：cotangent vector (frequency/momentum)

3. Coordinate-Invariant Definition (on Manifolds)

On a manifold M, the principal symbol is **intrinsically defined** as a function on the **cotangent bundle** T^*M:

$$\sigma_P:T^*M\to\mathbb{C}.$$

- For a coordinate chart, $\sigma_P(x,\xi)$ is constructed by replacing:
  - $\partial_{x_j}\mapsto i\xi_j$ (where $i=\sqrt{-1}$).
- **Key property**: Invariant under changes of coordinates (lower-order terms vanish in the transformation).

它把算子轉換為代數形式(a polynomial or function on the cotangent bundle)，簡化以下的分析

1. Characteristics (surfaces along which discontinuities propagate)

2. Ellipticity (smoothness of solutions)
3. Hyperbolicity (well-posedness of initial value problems)
4. Singularities of solutions (via microlocal analysis)

例

1. R^n 中的 Laplace 算子$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$其 principal symbol 為$\sigma_\Delta(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = |\xi|^2$

由此可判斷Δ是橢圓算子，因為當$\xi \neq 0$時$\sigma_\Delta(x,\xi) \neq 0$。

2. 波動方程算子 $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

   這是一個在$(t,x) \in R \times R^n$上的算子$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$，其 principal symbbpl 是

   $\sigma_P(t,x,\tau,\xi) = \tau^2 - |\xi|^2$

   P 是雙曲型算子因為主符號不是處處非零，而是退化在$\tau^2 = |\xi|^2$的錐上。

3. 一階傳輸方程 $P = \frac{\partial}{\partial t} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$

   在R^2中的一階算子，其 principal symbol 為$\sigma_P(t,x,\tau,\xi) = i\tau + ia(x)\xi$

   這類算子不為橢圓，但其主符號可用來分析波前集(wave front set)與特徵方向。