

§ 自旋幾何筆記

導論

本講義旨在介紹自旋幾何 (Spin Geometry) 的基本結構，包括 Clifford 代數、旋量表示、Spin 主叢、自旋叢 (spinor bundle) 與 Dirac 算子等核心觀念。自旋幾何位於微分幾何、表示論與分析之交界，並在現代幾何拓撲 (特別是 index theory 與四維流形理論) 中扮演重要角色。

第一章 Differential Manifold

1.1 [Differential Operators](#) on Manifolds

第二章 Clifford Algebra and Lie Algebra

1.1 Introduction [習作 [Clifford Algebra](#)] [[Spinor Clifford Algebra](#)]

1.2 Clifford 乘積：(1)Reflection [[習作](#)] (2)Rotation

1.3 Spin 群： Cl_3 ，Spin(3)，Spin(4)

第三章 Lorentz Group and $SL(2, \mathbb{C})$

2.1 [Lorentz transformation](#) [習作](#)

2.2 [Lorentz Group](#) [習作](#)

2.3 Lorentz 群的表示 [習作](#)

2.4 $SO(3)$ ， $SO(4)$ ， $SU(2)$ $SO(3,1) \simeq SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$

[習作 [Spinor representation](#) of $SO(3)$] [[Representation](#) 隨處可見]

第四章 Spinors

3.1 [Introduction of Spinors](#) 何謂旋量？[習作] [習作 [Pauli Spinors](#)]

1928 年 Dirac 把 [Energy-mass equation](#) $E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$ [開根號](#) (引入

Dirac 矩陣，作平方根操作) 引入旋量。

[[Spinors 簡介](#)]

3.2 Maxwell，Dirac，Weyl，Majorana and Pauli spinors

[習作 [Dirac Spinors](#)]

3.3 Spin 結構：[習作 [Spin\(4\)](#)]

3.4 Spin 流形

第五章 Dirac Operator

4.1 The classical Dirac operator on spinors

4.2 [電磁場](#)與 Dirac current

4.3 聯絡與曲率

第六章 量子力學中的旋量與 Dirac 方程式

第七章 Index Theorem and its applications

6.1 簡介 [Atiyah – Singer 指標定理](#)的幾何與拓撲意義

6.2 以 Dirac 算子為例說明指標的計算

6.3 應用範例：手徵反常、零模計數、拓撲不變量

第八章 Holonomy Groups

7.1 引入 Berger 分類的簡要說明

7.2 說明 $\text{Spin}(7)$, G_2 等特殊 Holonomy 流形與旋量的關係

第九章 Killing spinor fields

第十章 [Open Problems](#) 扭量([Twistor](#))

參考書目

1. Clifford Algebras and Spinors Pertti Lounesto
2. An Introduction Theory of Spinors Moshe Carmeli and Shimon Malin
3. [Spinors in Physics](#) Jean Hlsdik
4. An Introduction to Clifford Algebras and Spinors Jayme Vaz
5. The Dirac Spectrum Nicolas Ginoux
6. Spin Geometry (1) Christian Bar
7. Spin Geometry (2)
8. Spinors and space-time R.Penrose and W.Rindler
9. Clifford Algebras Daniel Klawitter
10. Lecture Notes on Spin Geometry Konstantin Wernli
11. Spin Ilya Kuprov
12. Dirac Operators and Spectral Geometry Joseph C. Varilly
13. Spinors in Four-Dimensional Spaces Gerardo F. Torres del Castillo
14. The Dirac Equation in Curved Spacetime Peter Collas and David Klein
15. Spinors and Space-time Anisotropy(各向異性)
16. Principal Bundles Stephen Bruce Sontz