§ Spinor bundle of a Riemannian spin manifold

(M,g)是一個黎曼自旋流形，其 spinor bundle S 是一個向量叢，其纖維是旋量空間，由 spin 結構和旋量表示所定義。

例　M=R^3 with standard Euclidean metric g

R^3是一個簡單的黎曼旋量流形，其標準度量 g 是歐幾里得度量。

R^3是 spin 流形，因為它是可收縮的，其 spin 結構是平凡的。

- **Spin 群和表示**：對於 n=3，Spin(3) ≅ SU(2)，旋量表示 Δ_3 是 SU(2) 在 $\mathbb{C}^2$ 上的基本表示。因此，旋量空間是 $\mathbb{C}^2$。
- **Spinor Bundle**：由於 $\mathbb{R}^3$ 可縮，其 spin 主叢是平凡的，因此 spinor bundle S 也是平凡叢，即 S = $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$。這意味著對於每一點 p ∈ $\mathbb{R}^3$，纖維 S_p 與 $\mathbb{C}^2$ 同構。
- **截面**：Spinor bundle 的截面稱為旋量場，是從 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{C}^2$ 的光滑函數。

例　S^3 的旋量叢(spinor bundle)

1. S^3 本身是一個自旋流形：

   任何可定向的、二維和三維的流形都自動擁有 Spin 結構，因此 S^3 無疑是一個 pin 流形。

2. Spin principal bundle(主叢)

   給定一個黎曼流形 (M, g)，其 Spin 結構是一個 Spin 主叢 $P_{\text{Spin}}(M)$，以及一個到其定向正交標架叢 $P_{SO}(M)$ 的雙重覆蓋映射 $\theta : P_{\text{Spin}}(M) \to P_{SO}(M)$，這個映射要與群同態 $\text{Spin}(n) \to SO(n)$ 相容。

   對於 S^3，情況變得非常簡單而優美：

   - 三維旋量群 $\text{Spin}(3)$ 與特殊酉群 $SU(2)$ 同構。
   - S^3 本身（視為 $SU(2)$）就是它自己的一個 **平凡** 的 $\text{Spin}(3)$-主叢。也就是說，我們可以取：

   $$P_{\text{Spin}}(S^3) = S^3 \times \text{Spin}(3) \cong S^3 \times SU(2)$$

   - 其對應的標架叢 $P_{SO}(S^3)$ 則同構於 $S^3 \times SO(3)$。
   - 雙重覆蓋映射 θ 對應於我們熟知的群同構 $SU(2) \to SO(3)$（其核為 $\{\pm 1\}$）。

3. 旋量叢(Spinor Bundle)的結構

旋量叢 S 是通過將 Spin 主叢 $P_{\text{Spin}}(M)$ 與 $\text{Spin}(n)$ 的旋量表示 Δ_n 進行**相伴構造** (Associated Fiber Bundle Construction) 得到的：

$$S := P_{\text{Spin}}(M) \times_\rho \Delta_n$$

這裡 $\rho : \text{Spin}(n) \to \text{GL}(\Delta_n)$ 是旋量表示。

對於 $n = 3$：

- **旋量表示**：$\text{Spin}(3) \cong SU(2)$ 的基礎表示（定義表示）就是在 $\mathbb{C}^2$ 上的作用。因此，旋量表示空間就是 $\Delta_3 = \mathbb{C}^2$。
- **相伴構造**：我們將主叢 $P_{\text{Spin}}(S^3) \cong S^3 \times SU(2)$ 與表示空間 $\mathbb{C}^2$ 結合。在這個構造中，我們在叢上模掉等價關係：$(p, g, v) \sim (p, gh^{-1}, \rho(h)v)$，其中 $p \in S^3, g, h \in SU(2), v \in \mathbb{C}^2$.

由於 S^3 和 $SU(2)$ 的結構，這個構造的結果是一個**平凡叢**：

$$S \cong S^3 \times \mathbb{C}^2$$

為什麼是平凡的？

直觀上理解，因為 S^3 本身作為一個群（$SU(2)$）可以**平凡地**作用在表示空間 $\mathbb{C}^2$ 上。我們可以定義一個全局的叢同構：

$$\Psi : S^3 \times \mathbb{C}^2 \to S, \quad (p, v) \mapsto [(p, I, v)]$$

其中 I 是 $SU(2)$ 的單位元，$[(p, g, v)]$ 代表等價類。這個映射是良好定義的並且是微分同胚。

總結與物理意義

因此，三維球面 S^3 的旋量叢是一個 **平凡的複向量叢**，其秩為 2：

$$S = S^3 \times \mathbb{C}^2$$

這意味著：

- **纖維**：在每一點 $p \in S^3$，其上的旋量空間 S_p 都與 $\mathbb{C}^2$ 標準同構。
- **截面**：旋量叢的一個截面（稱為*旋量場*）就是一個從 S^3 到 $\mathbb{C}^2$ 的光滑函數 $\psi : S^3 \to \mathbb{C}^2$。不存在任何"扭結"或全局拓撲障礙，我們可以在整個 S^3 上一致地定義旋量分量。

與其他流形的對比：

- 這與二維球面 S^2 形成鮮明對比。S^2 也是一個 Spin 流形，但其旋量叢是**非平凡**的（由毛球定理可知，它不存在處處不為零的截面）。這顯示了 S^3 在拓撲上的特殊性。
- 在物理中，S^3 的模型常被用於宇宙學（作為宇宙空間形狀的一個簡單候選）和凝聚態物理（某些有序介質的序參量空間）。在其上定義的旋量場沒有拓撲障礙，這使得分析得以簡化。

在這個旋量叢上，我們可以定義狄拉克算子 D。
由於叢是平凡的，這個算子作用在 C^2-值函數上，其局部形式與平坦空間類似：$D\psi = \gamma^i \nabla_i \psi$

其中 γ^i 是 Clifford algebra 的生成元(滿足 $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2g^{ij}$ 的矩陣)，∇_i 是與 Riemannian metric g 相容的旋量聯絡。
在 S^3 中，由於其高度的對稱性，Dirac 算子的特徵值與解可以明確地計算出來。