

§ The spin structure : (P_{spin}, ϕ)

§ S^3 上的自旋結構

由於 S^3 同構於 $SU(2)$ ，它天然攜帶一個自旋結構。

(1) $P_{spin} \rightarrow S^3$ 是一個 $Spin(3)$ 的主叢。

(2) $\phi: P_{spin} \rightarrow P_{so}$ is a 2-1 bundle map and $\eta(p \cdot g) = \eta(p) \cdot \rho(g)$ for

$$\forall p \in P_{spin}, g \in Spin(n) \quad \rho: Spin(n) \rightarrow SO(n)$$

P_{so} 稱為框架叢。

因此可定義 spinor field 與 Dirac operator。

三維球面 S^3 的自旋結構 (spin structure) 是唯一且天然存在的。其構造方法主要基於以下數學事實：

1. S^3 作為一個三維閉合定向流形，其切向量束是可平行化 (parallelizable) 的。這代表 S^3 的切叢為平凡纖維叢，因此沒有拓撲阻礙升起其框架纖維叢 (frame bundle) 到自旋群 $Spin(3)$ 的覆蓋。
2. S^3 同胚於李群 $SU(2)$ ，而 $Spin(3) \cong SU(2)$ 自然給出對應自旋結構，即 S^3 的主框架叢 (principal frame bundle) 可以通過 $SU(2)$ 的結構來提升到對應的自旋主叢。
3. 構造層面，可視為將 S^3 視為 $SO(3)$ 的雙覆蓋 $Spin(3) = SU(2)$ 上的主叢，這個提升是唯一且自然的。
4. 由於 S^3 是簡單連通且切叢平凡，因此自旋結構的存在性和唯一性均獲保證。更形式化而言，任意定向三維流形都存在自旋結構，而 S^3 作為最基本例子，其自旋結構唯一且自然。