§ Clifford and Lie algebra

8.1

1. Show that the vector space R^3 forms an algebra when provided with the vector product。

   F 是一個域(field)，所謂 F-algebra A 就是
   (1) A 在 F 上是一個 vector space
   (2) A 是一個 ring，具有結合律 分配律
   (3) 相容性 $\lambda(a \bullet b) = (\lambda a) \bullet b = a \bullet (\lambda b)$

   這裡的 vector product 指的是外積。

2. Show that it is a Lie algebra。

   考慮 Lie bracket 定義為外積 $[x, y] = x \times y$ 要滿足
   (1) 雙線性
   (2) 反對稱性
   (3) Jacobi 恆等式 Jacobi identity [x，[y，z]]+[y，[z，x]]+[z，[x，y]]=0
   $a \times (b \times c) = (a \bullet c) b - (\bullet\ a$

   如果沒有 Jacobi 恆等式會怎樣？
   (1) 李的三個基本定理會失效
   (2) 通用包絡代數無法正確定義
   (3) 表示論基礎崩塌
   (4) 分類理論不可能

   李的三個基本定理是：
   (1) 每一個李群都決定一個李代數

   每一個李群 G 都唯一地決定了一個李代數 $\mathfrak{g}$，這個李代數作為向量空間同構於 G 在單位元處的切空間 $T_e G$。李括號 $[X, Y]$ 可以通過群乘法來定義（例如，通過左不變向量場的李括號，或通過交換子的極限）。

   (2) 李代數的同態可以局部地提升為李群的同態。

   令 G 和 H 為李群，其對應的李代數為 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$。如果 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一個李代數同態（即保持李括號的線性映射），那麼存在 G 中單位元的一個鄰域 U 和 H 中單位元的一個鄰域 V，以及一個局部李群同態 $\Phi : U \to V$，使得 Φ 在單位元處的微分 $d\Phi_e$ 正好等於 ϕ。

   (3) 每一個有限維李代數都同構於某一個李群的李代數。每個李代數都來自某個李群。

R^2 可以有 Lie algebra 的結構：

   (1) 定義[u,v]=0 對所有 $u, v \in R^2$ 是 Abel 結構，對應於平面平移。
   (2) 取標準基 $\{e_1, e_2\}$，定義 $[e_1, e_2] = e_1$（$[u, v] = (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_1$）是非 Abel 結構，對應於仿射變換。

   這體現了李代數的一個深刻事實：同一個向量空間可以承載多個不同的李代數結構，取決於我們如何定義李括號。

3. Determine the structure constants of this algebra。

假設$\{e_1, e_2, e_3\}$是R^3的標準么正基，則$[e_j, e_k] = e_j \times e_k = \varepsilon_{jkm}$，j，k，m=1,2,3

這個ε_{jkm}就稱為這 Lie algebra 的結構常數。

8.2

Consider the operators $Q = x, P = \dfrac{\partial}{\partial x}$ acting on functions of the real variable x。

1. Calculate the commutator [P,Q]

   $$[P,Q]f(x) = \frac{\partial}{\partial x} xf(x) - x\frac{\partial}{\partial x} f(x) = f(x)$$

   所以[P,Q]=1

2. Consider the commutatior as the Lie bracket，show that the vector space with the basis {1,P,Q} is a Lie algebra。

   這個 Lie algebra 稱為海森堡代數η_3，在量子力學扮演著基本角色。

   3 維海森堡李代數由 3 個生成元$\{p, q, z\}$構成，滿足

   $[p,q] = z, [p,z] = 0, [q,z] = 0$，這裡 p,q 可以理解為位置和動量算符。

   Z 是中心元（與所有元素對易）。

   考慮矩陣則$\eta_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in R \right\}$

   取$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   則[P,Q]=Z，[P,Z]=0，[Q,Z]=0

   在量子力學中，對於位置算符$\hat{x}$和動量算符$\hat{p}$，$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}$

   若我們定義$p = \dfrac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar}}, q = \dfrac{\hat{x}}{\sqrt{\hbar}}, z = i\hat{I}$ 則[p,q]=z。

   相關的海森堡群為$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a,b,c \in R \right\}$

3. Set $a = \dfrac{P+Q}{\sqrt{2}}, a^\dagger = \dfrac{Q-P}{\sqrt{2}}$，calculate the commutator $[a, a^\dagger]$

The operators a and $a^\dagger$ are called respectively *boson creation and annihilation operators*. They are introduced naturally during the solution of the Schrödinger equation for the harmonic oscillator, the solutions of which form a representation of the operators a and $a^\dagger$ in Hilbert space.

算符$a, a^\dagger$分別稱為玻色子的生成算符與湮滅算符。

$[a, a^\dagger] = 1, [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$

最經典的例子是**量子諧振子**：

- 哈密頓算符：$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$
- 位置算符：$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$
- 動量算符：$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$

這裡的對易關係 $[a, a^\dagger] = 1$ 保證了 $[x, p] = i\hbar$。

4. Consider a set of operators Q_i and P_i operating on some independent variables x_i。Find the commutation relations for the operators a_i and $a_i^\dagger$ associated with each varibles。

5. Consider two operators a_1, a_2。Show that the operators $J_+ = a_1^\dagger a_2, J_- = a_2^\dagger a_1, J_0 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)$ form a realization of the Lie algebra su(2)。

8.3

1. Show that the following matrices $\gamma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$

   where the σ_i are the Pauli matrices，are able to serve as generating elements of a Clifford algebra。

   The generating elements of a Clifford algebra have to satisfy the conditions

   $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$ with i,j =0,1,2,3

   由$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$ for $i \neq j$

   Similarly，$\{\gamma_0, \gamma_i\} = 0$ for i=1,2,3；$(\sigma_i)^2 = 1$ for i=0,1,2,3

We can varify $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$ with i,j =0,1,2,3

2. Determine the basis elements of this Clifford algebra。

8.4

Let there be n Hermitian operators α_j satisfying the Clifford algebra relations

$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}$ 。

Set $a_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + i\alpha_2), a_1^\dagger = \frac{1}{2}(\alpha_1 - i\alpha_2), a_2 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + i\alpha_4)$ ，etc

Calculate the anticommutation relations $\{a_j, a_k\}$

We obtain the following anticommutation relations by taking account of the Clifford algebras relations, that is,

$$\{a_i, a_j\} = 0, \qquad \{a_i{}^\dagger, a_j{}^\dagger\} = 0, \qquad \{a_i, a_j{}^\dagger\} = \delta_{ij}.$$

These anticommutation relations are those realized by the fermion creation and annihilation operators in quantum mechanics. They are the operators associated with particles having half-integer spin. Mathematically, they appear as the artefacts of a Clifford algebra.

8.5

This exercise allows us to introduce the relation between the Pauli spinors and quaternions。

1. Let 1,i,j,k be the basis vectors of the quaternion algebra。Recall the properties of these vectors。

2. Quaternions can be written $q = w + xi + yj + zk$ 。
   Set $\psi = w + zk, \phi = -y + xk$ 。Show that q can be written in the form $q = \psi - j\phi$

3. Consider a quaternion $u = \alpha + \beta k$ ，and write $\bar{u} = \alpha - \beta k$ 。Let $q_1 = \psi_1 - j\phi_1$ 。

   Show that the product $q_1 q$ can be put in the form $q_1 q = \psi_1' - j\phi_1'$ ，where the

   quaternions ψ_1' and ϕ_1' are functions of $\psi, \phi, \psi_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\phi}_1$ 。

4. Consider the following rotation quaternion $q_2=\cos\frac{1}{2}\theta-(iL_1+jL_2+kL_3)\sin\frac{1}{2}\theta$ ，which can be associated with a rotation in three-dimensional space through an angle θ about an axis along a vector L with components L_1, L_2, L_3 。Let $q_2q=\psi_2^{'}-j\phi_2^{'}$ 。Calculate $\psi_2^{'}$ and $\phi_2^{'}$ as a function of the rotation parameters。

5. In the expressions obtained in the preceding exercise replace k by $\sqrt{-1}=i$ ，and show that the vector $\eta=\begin{pmatrix}\psi\\ \phi\end{pmatrix}$ transforms under a rotation given by q_2 as a two-component spinor。

Pauli matrices $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 滿足 $\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}I+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

Quaterinions $q=a+bi+cj+dk$

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$，$ij=k, jk=i, ki=j$ ，反對稱 $ji=-ij$ $\cdots$

Pauli 矩陣提供四元數的一種矩陣表示：

$i=-i\sigma_x, j=-i\sigma_y, k=-i\sigma_z$ (這裡符號有故意誤用，例如 $i=-i\sigma_x$ 第一個 i 是四元數的 i，第二個 $i=\sqrt{-1}$)

$ij=(-i\sigma_x)(-i\sigma_y)=-\sigma_x\sigma_y=-i\sigma_z=k$

Pauli spinors 是二分量複數矩陣，屬於 SU(2)的表示空間。

SU(2)由 2×2 酉矩陣構成，$U=\begin{pmatrix}a+id&-b+ic\\b+ic&a-id\end{pmatrix}$

(SU(2)是 Pauli spinors 的變換群)

單位四元數 $q=a+bi+cj+dk$ 滿足 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ 可對應到 U，這種對應是二對一，這反映了 SU(2)是 SO(3)的雙覆蓋。

在量子力學中，Pauli spinors $\chi=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ 在旋轉下由 SU(2) 變換。由於 SU(2) 與單位 quaternions 同構，quaternions 可用來描述 spinors 的旋轉。具體地，一個單位 quaternion q 對應一個旋轉操作，作用於 spinor 上相當於矩陣乘法。

然而，在實際計算中，通常直接使用 Pauli 矩陣和 SU(2) 表示，因為 quaternions 在量子力學中較少直接使用，但這種關係在數學物理和計算機圖學中有應用。