§ $L: y=-\frac{1}{2}x-1$，求 D(3,0)關於 L 的反射點

初等的方法是這樣的，假設反射點$D'(a,b)$，則(a,b)滿足

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a-3}=2.....(1) \\ \dfrac{b}{2}=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{a+3}{2})-1...(2) \end{cases}$$

(1) 是因為$\overline{DD'}\perp L$，(2)是因為 D， D'的終點落在 L 上。

算出$\text{D}'(1,-4)$

在 Clifford 代數中，乘法是這樣定義的$ab=a\bullet b+a\wedge b$

且$a^2=aa=|a|^2$

$a_{\|}$表示 a 在 b 的投影，$a_{\perp}=a-a_{\|}$，$b^{-1}=b/|b|^2$

則$a_{\|}=(a\bullet b)\dfrac{b}{|b|^2}=(a\bullet b)b^{-1}$

$a_{\perp}=a-a_{\|}=a-(a\bullet b)b^{-1}=(ab)b^{-1}-(a\bullet b)b^{-1}=(a\wedge b)b^{-1}$

r'是 r 對 a 的反射(reflection)

$r'=r_{\|}-r_{\perp}=(r\bullet a)a^{-1}-(r\wedge a)a^{-1}=(r\bullet a-r\wedge a)a^{-1}=(a\bullet r+a\wedge r)a^{-1}=ara^{-1}$

現在 L 與 y 軸交於 C(0,-1)，$r=\overrightarrow{CD}=(3,1), a=(2,-1)$(L 的方向向量)

$a^{-1}=\dfrac{a}{|a|^2}=(\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5})$

改寫一下$r=(3,1,0), a=(2,-1,0)$ 則$a^{-1}=\dfrac{1}{5}(2,-1,0)$

$ar=a\bullet r+a\wedge r=5+(0,0,5)$

$r'=\dfrac{1}{5}[5+(0,0,5)](2,-1,0)=(2,-1,0)+(-1,-2,0)=(1,-3,0)=\overrightarrow{\text{CD}'}$

所以$\text{D}'(1,-4,0)$

Clifford 代數的做法是這樣：

(1) 求出 r 在 a 方向的投影向量$a_{\|}=(\dfrac{r\bullet a}{|a|^2})a=(2,-1)$

(2) $a_{\perp} = a - a_{\|} = (1, 2)$

(3) $r' = r_{\|} - r_{\perp} = (2, -1) - (1, 2) = (1, -3)$