§ 為什麼說格林函數(Green function)是一個分佈

在 R 上的熱方程 $u_t - ku_{xx} = 0$，其基本解為 $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp(-\frac{x^2}{4kt})$ 稱為熱核 (heat kernel)

$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t), t > 0 \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases}$ 的解為

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)g(y)dy$ 寫成 $(G*g)(x)$ 稱為 convulution(褶積)

以上是在 PDE 熱方程的簡單結論。其中 G(x,y)就是 Green function。

Green function 是解微分方程的重要工具。
對於一個線性微分算子L (例如 $L = -\Delta + V$)，其 Green function G(x,y)滿足
$LG(x,y) = \delta(x-y)$。
其中的 Dirac 函數是一種分佈。
這意味著 G(x,y)是算子 L 的逆算子的積分核（integral kernel）。

格林函數實際上是通過與測試函數 ϕ 的積分來作用：

$u(x) = \int G(x,y)\phi(y)dy$，將 ϕ 映射到 u(x)，這符合分佈的定義。

在譜理論中，格林函數與算子的譜分解（spectral decomposition）密切相關：

1. 離散譜與連續譜
   (1) 若 L 有離散譜（例如量子力學中的哈密頓算符），格林函數可以寫成特徵函數的級數：$G(x,y) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(y)}{\lambda}$
   (2) 若 L 有連續譜（例如自由粒子的 $-\Delta$ ），格林函數可能涉及積分：
   $$G(x,y) = \int \frac{\psi_k(x)\psi_k^*(y)}{k^2} dk$$
2. 解析延拓與譜測度

例

1. 一維薛丁格算子

   考慮 $L = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$，其 Green function $G(x,y;\lambda)$ 滿足：
   $(L-\lambda)G(x,y;\lambda) = \delta(x-y)$

2. Laplace operator 的 Green function

在 R^3 中，$-\Delta$ 的 Green function 是 $G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}$

它在 x=y 處不可積，但作為分佈，可以通過正則化（如傅立葉變換）定義其作用。

§ heat equation

熱方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\Delta u$ 的基本解(fundamental solution)K(x,t)滿足：

$$\frac{\partial K}{\partial t}=\alpha\Delta K, K(x,0)=\delta(x)$$

在 R^n 上，熱方程的基本解是高斯核(Gaussian kernal)：

$$K(x,t)=\frac{1}{(4\pi\alpha t)^{n/2}}\exp(-\frac{|x|^2}{4\alpha t})$$

對於熱算子 $L=\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\Delta$ ，其 Green function G(x,t;y,s)滿足

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\Delta)G(x,t;y,s)=\delta(x-y)\delta(t-s)$$ ，且 t<s 時 G=0

為什麼基本解是分佈？

1. **初始條件涉及 δ 函數**：$K(x,0)=\delta(x)$ 不是普通函數，而是分佈（廣義函數）。
2. **積分表示解**：熱方程的解可寫成卷積：

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y,t)\,u_0(y)\,dy,$$

   其中 $u_0(y)$ 是初始條件。這正是分佈（格林函數）與函數的作用方式。
3. **奇異性**：當 $t\to 0^+$，$K(x,t)$ 收斂到 δ 函數，這在傳統函數空間無法描述，必須用分佈理論。

熱方程的基本解不僅是格林函數的特例，也是分佈理論和譜理論在偏微分方程中的經典應用。