

§ Spectral Theory lesson 003 What is the Sobolev space

§ 先解釋一下 L^2 space，平方可積的 Hilbert 空間。

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, L^2(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

1. 有良好定義的內積 $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$
2. 是一個完備空間：
即所有在該空間中的柯西序列（Cauchy sequence）都收斂到該空間中的某個元素。
3. 這讓我們能做出正交投影、傅立葉展開、最小平方逼近等分析操作。

§ 何謂 Sobolev 空間，簡單地說：

Sobolev 空間 H^k 就是所有 k 階弱導數存在且平方可積的函數所形成的空間。

以一維為例： $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是一個開區間。

Sobolev 空間為：

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^{\alpha} f \in L^p(\Omega), \text{ for all } |\alpha| \leq k\}$$

其中 $D^{\alpha} f$ 表示 f 的弱導數。

例 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ：所有 k 階弱導數在平方意義下可積的函數空間。
是最常用的 Sobolev 空間之一。

我們再回頭看一下

一個函數 $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ ，若對所有測試函數 φ ， $\int_{\Omega} f(x) \varphi'(x) dx = -\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx$ 成立，則稱 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的弱導數。

例 $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ 這是一個「階躍函數」，在 $x=0$ 不連續，當然無法「可微」。

但在 Sobolev 空間中，可以計算其弱導數，結果是某種分佈（類似狄拉克 delta 函數的東西），這使得我們仍可以在方程中使用它。

Sobolev 空間是數學物理、變分法與偏微分方程中不可或缺的工具，例如熱方程的解往往只能在 H^1 中尋找弱解。