§ The Laplacian on a Riemannian manifold

The Laplace-Beltrami operator

$$dV = dV_g = \sqrt{\det(g)}dx$$

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j})$$

Exercise

Given $u,v \in C^\infty(M)$，show that $\Delta(uv) = v\Delta u + 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle_g + u\Delta v$

Example

Suppose that (M,g) is a Riemannian manifold，$ds^2 = h(x,y)(dx^2 + dy^2)$，where h(x,y)>0

Show that $-\Delta = -\frac{1}{h(x,y)}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$

§ The Laplacian on a flat torus

Consider a two-dimensional flat square torus $T_a^2 = R^2/(a\mathrm{Z})^2$，find the eigenvalues and eigenfunctions

在T_a^2上，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$T_a^2 = R^2/(a\mathrm{Z})^2$表示(x,y)與(x+am,y+an)視為等同，即特徵函數ϕ滿足

$$\phi(x+a,y) = \phi(x,y), \phi(x,y+a) = \phi(x,y)$$

透過傅立葉分析（考慮週期性條件），特徵函數和特徵值可明確給出。最自然的解是平面波型。

1. 分離變數法：假設$\phi(x,y) = X(x)Y(y)$，代入$\Delta\phi = \lambda\phi$
2. 在 x 方向，週期 a 的特徵函數為$\exp(2\pi imx/a), m \in Z$，特徵值為 $-(2\pi m/a)^2$；y 方向類似。
3. 二維組合：特徵函數取乘積，特徵值相加。

特徵值$\lambda_{m,n} = \frac{4\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)$

對應的特徵函數$\varphi_{m,n}(x,y) = e^{2\pi i(\frac{mx+ny}{a})}$，$m,n \in Z$

1. **特徵值的重數（multiplicity）**：
   - 特徵值 $\lambda_{m,n}$ 僅依賴於 $m^2 + n^2$（而非 m 和 n 的符號或順序）。
   - 因此，不同的整數對 (m, n) 可能給出相同的特徵值（當 $m^2 + n^2$ 相同時）。例如：
     - 對於 $m^2 + n^2 = 1$，對應的 (m, n) 有 $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$，特徵值 $\lambda = -\frac{4\pi^2}{a^2}$ 的重數為 4。
     - 當 $m = n = 0$ 時，特徵值 $\lambda_{0,0} = 0$ 的重數為 1（對應常數函數）。
   - 特徵值的重數等於能寫成 $m^2 + n^2 = k$ 的整數對 (m, n) 的數量（其中 k 是固定非負整數）。