

§ Lichnerowicz – Obata Theorem

Let (M, g) be a closed Riemannian manifold of dimension n such that $\text{Ric} \geq k(n-1) > 0$

(i. e. for any $\xi \in TM$ we have $\text{Ric}(\xi, \xi) \geq k(n-1)\|\xi\|^2 > 0$)

Then the first nonzero eigenvalue λ_1 of $-\Delta_g$ satisfies $\lambda_1 \geq nk$

Moreover, we have equality if and only if M is isometric to an Euclidean sphere of dimension n .

Obata :

如果等號成立(即 $\lambda_1 = nk$)則那麼 M 必定是一個常曲率為 k 的標準 n 維球面 S^n (以適當的尺度)。

這個定理是微分幾何中關於黎曼流形上的 Laplace operator 譜的一個重要結果，它建立了流形的里奇曲率與其 Laplace operator 最小非零特徵值之間的下界關係，並在達到下界時給出了流形的剛性描述（即流形必須是標準球面）。

1. 設定

(1) 考慮一個 n 維 ($n \geq 2$) compact、without boundary Riemannian manifold (M, g)

(2) 令 $\Delta = d^*d = -\text{div}(\text{grad})$ 為 Laplace-Beltrami operator

(3) Laplace operator 的譜由一組非負實數構成： $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$

2. Lichnerowicz estimate :

假設流形 (M, g) 的里奇曲率處處不小於一個正常數 $\rho > 0$ 。($\rho = k(n-1)$)

也就是說，對於所有點 $p \in M$ 和所有單位切向量 $v \in T_p M$ ， $\text{Ric}(v, v) \geq \rho > 0$

(簡記為 $\text{Ric} \geq \rho g$)

Lichnerowicz 1958：在以上假設下，Laplace operator 的最小非零特徵值 λ_1 滿足

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} \rho \text{ (即 } \lambda_1 \geq nk \text{)}$$

可以看作是一種譜比較定理。

3. Obata Rigidity theorem 1962 :

$$\lambda_1 = \frac{n}{n-1} \rho \text{ if and only if } (M, g) \text{ 等距同構於半徑為 } \sqrt{\frac{1}{k}} \text{ 的 } n \text{ 維標準球面 } S^n(\sqrt{\frac{1}{k}})$$

這個定理的證明使用了著名的 Bochner 技巧 (Bochner formula)，它連接了梯度場的拉普拉斯與 Ricci 曲率，是幾何分析中極為重要的工具。

簡言之，Lichnerowicz – Obata 定理表明：在正里奇曲率下，球面是唯一能讓 Laplace operator 的最小非零振盪模式「慢到不能再慢」的流形。

這個結果深刻揭示了流形的幾何（曲率）與分析（譜）之間的精妙關係。

證明

Bochner-Lichnerowicz formula :

For any function $\varphi \in C^\infty(M)$ it holds that

$$\frac{1}{2} \Delta_g (|\nabla f|^2) = \|Hess f\|^2 + \nabla f \cdot \nabla \Delta_g f + Ric(\nabla f, \nabla f)$$

對於黎曼流形(M,g)上的一個 1-form ω , $\Delta \omega = \nabla^* \nabla \omega + Ric(\omega)$

$\Delta \omega$: 1-form ω 的 Hodge-Laplace operator 作用的結果

$\nabla^* \nabla \omega$: connection-Laplace operator

$Ric(\omega)$:

§ 1 Laplace comparison theorem

(M , g)是一完備的黎曼流形，其 Ricci 曲率滿足 $Ric \geq (n-1)k$, 則對於 $p \in M$, 距

離函數 $r(x) = d(p, x)$ 在 cut locus 外有 $\Delta r(x) \leq (n-1) \frac{s'_k(r)}{s_k(r)}$ 即距離函數的 Laplace

Δr 滿足

(1) 若 $k > 0$ 則

(2) 若 $k = 0$ 則 $\Delta r \leq \frac{n-1}{r}$

(3) 若 $k < 0$ 則

§ 2 Lichnerowicz – Obata Theorem

特性	Laplace Comparison	Lichnerowicz–Obata
類型	拉普拉斯距離函數比較	拉普拉斯譜的下界定理
假設	Ricci 下界	Ricci 下界 (正曲率)
結論	$\Delta r \leq$ 模型值	$\lambda_1 \geq nk$, 剛性成立
應用	體積估計、幾何收斂	譜幾何、Poincaré 常數
性質	局部到全域比較	全域剛性結果
模型空間	球面、雙曲、歐氏	球面達成等號

Laplace Comparison 是一個「比較微分不等式」定理，控制幾何量的行為。

Lichnerowicz – Obata 是一個「譜幾何剛性」定理，直接連結曲率與特徵值，並判定等號情況。

