§ S^n 上的 Laplace 算子

§ 01 圓周 S^1 上的 Laplace 算子

幾何背景：一維環面即圓周 S^1，視為區間 $[0,2\pi]$ 的端點黏合（週期邊界）。

Laplace 算子：為 $\Delta = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ with colsed manifold condition

(意思是說封閉流形條件：即週期性邊界條件：$u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi)$

函數空間：

定義在 S^1 上的平方可積函數(即 $L^2(S^1)$)，滿足週期性 $f(x+2\pi)=f(x)$

特徵值問題：$-\dfrac{d^2u}{dx^2}=\lambda u, u(x+2\pi)=u(x), \lambda \ge 0$

設 $u(x)=e^{kx}$ 則特徵方程式為 $k^2+\lambda=0 \Rightarrow k=\pm i\sqrt{\lambda}$

一般解 $u(x)=Ae^{i\sqrt{\lambda}x}+Be^{-i\sqrt{\lambda}x}, A,B\in C$ （後面假設 $k=\sqrt{\lambda}$ ）

由 $u(0)=u(2\pi) \Rightarrow A+B=Ae^{ikL}+Be^{ikL}$

由 $u'(0)=u'(2\pi) \Rightarrow ik(A-B)=ik(Ae^{ikL}-Be^{ikL})$

…

$A(1-e^{ikL})=0, B(1-e^{ikL})=0$

對於非平凡解 k=n for some $n\in Z$

對應的特徵值為 $\lambda=k^2=n^2$

後面 k=0，即 $\lambda=0$ 的情形 暫時省略。

$\lambda_0=0$，特徵函數：$\{1\}$

$\lambda_n=n^2$，特徵函數：$\{\cos(nx),\sin(nx)\}$ (與 $e^{in\theta}$ 等價，構成 $L^2(S^1)$ 的一組完備正交基。

$u(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ukx}$

任何 L^2 函數都可以展開為這些特徵函數的 Fourier 級數：$u(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n e^{in\theta}$

譜的完整描述：

Laplace 算子 Δ 的譜是離散的，譜 $(\Delta)=\{0,1^2,2^2,...,n^2,...\}=\{0,1,4,9,...,n^2,...\}$

特徵值$\lambda_n = n^2$的重數(multiplicity)：

$\lambda_0 = 0$ ：重數 1(常數函數) $\lambda_n = n^2 (n \geq 1)$：重數 2 (cos(nx)與 sin(nx)線性獨立)

註
一維環面有幾種說法：

1. $S^1 = \{(x, y) \big| x^2 + y^2 = 1\}$
2. [0,1]的線段，把 0 與 1 黏在一起。
3. $T^1 = \{z \in C \big\| z \big| = 1\}$是一個 Lie group
4. R/Z

§ 在S^1上一維的分佈
許多物理與數學中重要的函數不是光滑函數(例如 點源、脈衝、Green 函數)，甚至不是經典意義上的函數(例如 Dirac 函數)。
它們在經典L^2或光滑函數空間無法被描述為微分方程的解。
因此引入分佈(廣義函數)以解決上述的侷限性。

$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 y$ 則 $y(x) = a\cos nx + b\sin nx$

當限制在單位圓S^1上，算子$\Delta = -\dfrac{d^2}{d\theta^2}$ ，可知特徵方程$\Delta u = \lambda u$的解

(eigenfunction)為$u_n(\theta) = e^{in\theta}$ ，特徵值(eigenvalues)為$\lambda_n = n^2$ 。

現在黎曼流形是S^1

S^1上的測試函數集為$D(S^1)$ ：{smooth functions with compact support on S^1 }

例如 $\phi(\theta) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{1-(\theta-\pi)^2}, |\theta - \pi| < 1 \\ 0, other \end{cases} \in D(S^1)$

$D'(S^1)$:{作用在 test function 例如$\phi(\theta)$上的連續線性泛函。}

例如 Dirac 函數$< \delta_0, \phi >= \phi(0)$ for any $\phi \in D(S^1)$ ，$\delta_0 \in D'(S^1)$稱為δ_0分佈。

$\Delta u = \lambda u$的 smooth solutions 為例如$e^{in\theta} \in L^2(S^1)$

用 Fourier 的模式：$u(\theta)=\sum_{n\in Z}\hat{u}_n e^{in\theta}, \Delta u=-\sum_{n\in Z}n^2\hat{u}_n e^{in\theta}$ 。

在經典意義下，偏微分方程的解需要是光滑函數，但實際上，許多重要的解（如 Green 函數或基本解）是廣義函數（即分佈），因此需要拓展至 distributional 解的框架中。
如果我們想解這個方程在更廣義的空間中（例如 Dirac 分佈是否可以當作解），我們就需要進入 distributional solution（分佈解）的語境。

Let $u=\delta_0$ ，$<\Delta\delta_0,\phi>:=<\delta_0,\Delta\phi>=\Delta\phi(0)$ 所以 $\Delta\delta_0$ 也是一個分佈。

表現為分佈的解 例如 Dirac 分佈 $\delta(\theta-\theta')=\sum_{n\in Z}e^{in(\theta-\theta')}$

譜分析與分佈理論的結合點是 Dirac δ 的譜展開。
分布理論是譜分析在處理更廣泛問題時的自然延伸和必要工具。

§ 物理意義
這個數學範例對應著一維波動或振動現象，特別是具有週期性邊界條件的系統。以下是核心的物理對應：

1. **振動的弦（一維環上的波）：**
   - **物理系統：** 想像一根**無限長**的弦，但其性質在空間上是**週期性**的，週期為 2π（或者說，一根長度為 2π 的弦，其**兩端連接在一起**形成一個環）。這也可以看作是一個**完美的一維環狀波導**。
   - **控制方程：** 描述這種小振幅橫向（或縱向）振動的方程是**波動方程**：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

     其中 $u(x,t)$ 是弦在位置 x（或 θ) 和時間 t 的位移，c 是波速。

   - **分離變數與 Laplace 算子：** 為了求駐波解（特定頻率的振動模式），我們進行分離變數：$u(x,t)=X(x)T(t)$。代入波動方程並整理，得到關於空間的方程：

$$\frac{d^2X}{dx^2}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2X$$

     這**正是**講義中研究的特徵值問題 $\Delta X=\lambda X$，其中 $\Delta=-\frac{d^2}{dx^2}$，且 $\lambda=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$。

- **物理詮釋：**
  - **特徵值 $\lambda_n=n^2$：** 對應著系統**允許的、離散的振動頻率的平方**（相差一個常數因子 c^2）。因為 $\lambda_n=\omega_n^2/c^2$，所以 $\omega_n=c|n|$。頻率 ω_n 是離散的：$\omega_0=0$（靜止狀態）、$\omega_1=c$、$\omega_2=2c$、$\omega_3=3c$、... 這稱為系統的**固有頻率**或**簡正頻率**。

- **特徵函數 $e^{in\theta}$（或 $\cos(n\theta), \sin(n\theta)$）：** 對應著系統在這些特定頻率 ω_n 下的**振動模式**或**駐波形狀**。
    - $n=0$：$\lambda_0=0$，$u_0=$ 常數。物理意義：整個弦處於靜止或均勻平移/位移狀態（零頻率模式）。

    - $n=1$：$\lambda_1=1$，$u_1^{(c)}=\cos(\theta)$，$u_1^{(s)}=\sin(\theta)$。物理意義：弦形成一個完整的正弦/餘弦波駐波（波長為 2π）。這是基頻模式。
    - $n=2$：$\lambda_2=4$，$u_2^{(c)}=\cos(2\theta)$，$u_2^{(s)}=\sin(2\theta)$。物理意義：弦形成兩個完整的正弦/餘弦波駐波（波長為 π）。這是第一泛音。
    - $n=k$：$\lambda_k=k^2$，$u_k^{(c)}=\cos(k\theta)$，$u_k^{(s)}=\sin(k\theta)$。物理意義：弦形成 k 個完整的正弦/餘弦波駐波（波長為 $2\pi/k$）。

    - **重數 2 ($n \geq 1$)：** 對應於同一個頻率 $\omega_n = c|n|$，存在**兩種獨立的、相位相差 90 度**的駐波模式（$\cos(n\theta)$ 和 $\sin(n\theta)$）。可以將它們想像成在環上相同「形狀」的波，但「旋轉」了四分之一個波長。該頻率的任何駐波都可以看作是這兩種基本模式的線性組合。
- **Fourier 級數的物理意義：** 講義中提到的任意函數 $u(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta}$ 的 Fourier 展開，在物理上表示**弦的任意初始形狀或任意擾動**，都可以分解為這些**基本駐波模式**的疊加。時間演化部分（由 $T(t)$ 滿足的方程決定）決定了每個模式如何隨時間振盪 ($\sim e^{i\omega_n t}$)。因此，整個弦的複雜運動可以看作是所有這些簡單駐波運動的組合。

2. **量子力學中的粒子在環上：**
    - **物理系統：** 考慮一個**單粒子**被約束在一個**圓周** (S^1) 上運動（例如，一個非常理想的環狀分子或一個受限在環狀奈米結構中的電子）。
    - **控制方程：** 粒子的量子態由**波函數** $\psi(\theta)$ 描述，滿足**定態薛丁格方程**：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{d\theta^2}=E\psi$$

    其中 m 是粒子質量，E 是能量，$\hbar$ 是約化普朗克常數。

- **物理詮釋：**
    - **特徵值 $\lambda_n = n^2$：** 對應著**離散的允許能量（能階）**。因為 $\lambda_n=\frac{2mE_n}{\hbar^2}$，所以 $E_n=\frac{\hbar^2 n^2}{2m}$。能量是量子化的：$E_0=0$、$E_1=\frac{\hbar^2}{2m}$、$E_2=\frac{4\hbar^2}{2m}=\frac{2\hbar^2}{m}$、...
    - **特徵函數 $e^{in\theta}$（或 $\cos(n\theta), \sin(n\theta)$）：** 對應著能量為 E_n 的**定態波函數**。
        - $n=0$：$E_0=0$，$\psi_0=$ 常數。物理意義：粒子在環上各處出現的機率相同（基態）。
        - $n\neq 0$：$E_n=\frac{\hbar^2 n^2}{2m}$，$\psi_n^{(c)}\propto\cos(n\theta)$，$\psi_n^{(s)}\propto\sin(n\theta)$。物理意義：波函數具有 n 個波瓣（或波節），粒子在環上不同位置出現的機率不同。$|n|$ 稱為**角量子數**，其大小與角動量有關。
    - **重數 2 ($|n| \geq 1$)：** 對應於同一個能量 E_n（$n \geq 1$），存在**兩個獨立的量子態**（簡併態）。一個態對應波函數 $\cos(n\theta)$，另一個對應 $\sin(n\theta)$。它們具有相同的能量但不同的角動量取向（或波函數的相位分布）。

3. **分布（Dirac δ）的物理意義：**
   - 在波動問題中：$\delta(\theta-\theta_0)$ 代表在環上位置 θ_0 處施加的一個**瞬時、高度局域的衝擊力（點源）**。例如，用錘子非常快速地在環的某一點敲擊弦。
   - 在量子問題中：$\delta(\theta-\theta_0)$ 可以代表在位置 θ_0 處進行**位置測量**的算符（嚴格來說是投影算符的核），或者在 θ_0 處有一個非常局域的位能阱或位能壘（在極限情況下）。

- **譜展開的物理意義：** 公式 $\delta(\theta-\theta')=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in(\theta-\theta')}$ 具有深刻的物理含義：
  - 它表明，在 θ' 處的這樣一個**點源擾動**，可以分解為**激發所有可能的振動模式** ($n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$)。每個模式 $e^{in\theta}$ 都以特定的權重 ($\frac{1}{2\pi}e^{-in\theta'}$) 被激發。
  - 換句話說，一個局域的衝擊會**同時激起所有頻率的駐波**。高頻（大 n）模式對應於環上更精細尺度的振動。
  - 這個展開式是求解**點源響應（格林函數）**的基礎。例如，求解方程 $\Delta G(\theta,\theta')=\delta(\theta-\theta')$ 得到的 $G(\theta,\theta')$，描述了在 θ' 點施加一個單位脈衝力後，系統在 θ 點產生的**穩態響應**（或量子力學中的傳播子）。利用 δ 的譜展開，可以構造出 G 的表示式：$G(\theta,\theta')=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{in(\theta-\theta')}}{n^2}$（需要處理 $n=0$ 的模式，通常對應一個常數項或根據問題設定）。

總結：

這個抽象的數學範例（S^1 上的 Laplace 算子、離散譜、特徵函數、分布、Dirac δ 的譜展開）精確地建模了以下物理現象：

- **一維環狀結構（如閉合弦、環狀波導）上的波動/振動：** 離散的振動頻率、駐波模式、任意擾動的分解、點源激發的響應。
- **量子粒子在環上的運動：** 離散的能階、簡併的量子態、波函數的空間分布。

譜分析 ($\lambda_n=n^2, u_n=e^{in\theta}$) 揭示了系統固有的**振動模式/量子態**及其**頻率/能量**。
分布理論 (Dirac δ) 提供了描述**點源擾動**和求解**點源響應 (格林函數)** 的嚴格數學框架。
Dirac δ 的譜展開 則是連接兩者的橋樑，物理上表明**一個點源擾動等價於同時激發所有固有振動模式**。這使得該數學理論成為理解和計算物理系統對局域擾動響應的強大工具。

§ 點源擾動的譜分解：激發所有振動模式

$u(\theta,0)=\delta(\theta-\theta')$

$u(\theta,t)=\dfrac{1}{2\pi}\sum_n e^{in(\theta-\theta')}\cos(\omega_n t)$，角頻率 $\omega_n=cn$ 是獨立振盪，其中 c 是光速。

$\delta(\theta-\theta')=\dfrac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in(\theta-\theta')}$ 表示在 θ' 處的點源衝擊(就是敲一下)。

敲擊後觀察系統的穩態響應需解方程 $\Delta G(\theta,\theta')=\delta(\theta-\theta')$

解 $G(\theta,\theta')=\dfrac{1}{2\pi}\sum_{n\neq 0}\dfrac{e^{in(\theta-\theta')}}{-n^2}+C$ 即 Green 函數，給出在 θ 處測得的穩態位移。

§ Eigenvalues of Laplace-Beltrami operator on S^2

Using spherical coordinates (θ,ϕ)，the Laplace-Beltrami operator on S^2 is：

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}...(*)$$

We seek eigenfunctions $Y(\theta,\phi)$，and eigenvalues λ such that $\Delta_{S^2}Y = -\lambda Y$

Separation of variables

設$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$代入(*)得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta})\Phi + \frac{1}{\sin^2\theta}\Theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -\lambda\Theta\Phi$$ ，同除以$\Theta\Phi$ ，再同乘以$\sin^2\theta$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + \lambda\sin^2\theta + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

設$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2$ ，則

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0...(1) \\ \dfrac{\sin\theta}{\Theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}) + (\lambda\sin^2\theta - m^2)\Theta = 0...(2) \end{cases}$$

(1) 式是方位角方程式，(2)式是極角方程式。

由(1) $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$ ，其中 m 是整數(因為 BC $\Phi(\phi+2\pi) = \Phi$)

(2) 的部分，令 $x = \cos\theta$ ，$\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$ ，$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} \cdots(3)$

設$P(x) = \Theta(\theta)$ 代入(3) $\frac{d\Theta}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2}\frac{dP}{dx}$ ，$\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta} = -(1-x^2)\frac{dP}{dx}$

計算$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = \frac{d}{d\theta}(-(1-x^2)\frac{dP}{dx}) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP}{dx})$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = (1-x^2)\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP}{dx})$$

(2)式變成$(1-x^2)\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP}{dx}) + (\lambda(1-x^2) - m^2)P = 0$ 同處以$(1-x^2)$ 後展開得

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})P = 0$$

得到 associated Legendre equation：

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dP}{dx}) + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})P = 0$$

Eigenvalue $\lambda = l(l+1)$ 由 associated Legendre equation 解的存在性決定。

最後得到 eigenfunctions $Y_l^m(\theta,\phi) \propto P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \lambda_l = l(l+1)$

結論：

在 S^2 上的 Laplace-Beltrami operator 有一組完備的 eigenfunction…spherical harmonic function $Y_l^m(\theta,\varphi)$，滿足 $\Delta_{S^2} Y_l^m(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)$

$l = 0,1,2,3,..,m = -l,-l+1,...,l-1,l$

後記

1. $\Delta := \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j)$，$S^2 \subset R^3$，in spherical coordinates (θ,ϕ)

   $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$，$\sqrt{g} = \sin\theta$ then $\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

2. 完整的解為 $Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+(l-m)!}{4\pi(1+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$

3. Legendre polynomial：

The Legendre polynomials satisfy the **Legendre differential equation**:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

where n is a non-negative integer (the polynomial degree).

2. **Orthogonality:**

   They are orthogonal on the interval $[-1,1]$ with respect to the weight function $w(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \quad \text{if } m \neq n.$$

   For $m = n$, the integral evaluates to $\frac{2}{2n+1}$.

3. **Rodrigues' Formula:**

   The n-th Legendre polynomial can be generated using:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

First few Legendre polynomials：

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

4. 經典物理中，重力與靜電場滿足 $\Delta\Phi = 0$，當問題約束在球面上時就變成

   $\Delta_{S^2}\Phi = 0$；例如球面上的熱擴散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{S^2} u$

5. 陀螺運動方程的
   (1)對稱性 (2)角動量量子化 (3)球面幾何與 Laplace-Beltrami operator 有深層的關係。

§ S^3 的譜

$\{\lambda_k = k(k+2) | k = 0,1,2,...\}$ 重數 $(k+1)^2$

S^3 上的球面調和函數是 R^4 k 次調和多項式在 S^3 上的限制。
第一個非玲特徵值為 $\lambda_1 = 3$，重數 4

$$N(\lambda) \sim \frac{Vol(M)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\lambda^{n/2}, \lambda \to \infty \quad , Vol(S^3) = 2\pi^2 \text{ ， } \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

譜近似：Weyl 定律給出 $N(\lambda) \sim \frac{1}{3}\lambda^{3/2} \quad \lambda \to \infty$