§ 5.1.3 Spheres S^n p.110

§ 02 Consider the n-sphere S^n in R^{n+1}

其 Laplace-Beltrami 算子譜為 $Spec(S^n, can) = \{k(k+n-1), k \in N\}$

以下的推導是基於球諧函數(spherical harmonics)與分離變量法。

§ 02-1 球座標下的 Laplace 算子分解

Laplace 算子分解為徑向部分與球面部分：$\Delta_{g^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^n}$

其中 Δ_{S^n} 是 S^n 上的 Lalace-Beltrami 算子。

§ 02-2 齊次調和(homogeneous harmonic)多項式與球諧函數

$\mathrm{H}_k := R^{n+1}$ 上所有 k 次齊次調和多項式(即滿足 $\Delta_{S^n} P = 0$ 且 $P(tx) = t^k P(x)$)空間。

球諧函數：將 $P \in \mathrm{H}_k$ 限制在 S^n 上，得到 $f_k(\theta) = P\big|_{S^n}$ ，稱為 k 次球諧函數。

§ 02-3 求解 Δ_{S^n} 的特徵方程：球諧函數是 Δ_{S^n} 的特徵函數

$P \in \mathrm{H}_k, P(r,\theta) = r^k f_k(\theta)$

$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^n})(r^k f_k(\theta)) = 0$ ，展開化簡

…

得 $\Delta_{S^n} f_k = -k(k+n-1) f_k$

f_k 是 Δ_{S^n} 的特徵函數，對應特徵值為 $\lambda_k = k(k+n-1), k \in N$

其中因為 Δ_{S^n} 不作用於 r，$\Delta_{S^n}(r^k f) = r^k \Delta_{S^n} f_k$

§ 02-4 特徵值的重數(multiplicity)

λ_n 的重數為 $\dim \mathrm{H}_k$ 暫略

ℓ	Eigenvalue λ_ℓ	Multiplicity
0	0	1
1	n	$n+1$
2	$2(n+1)$	$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$
...	$\ell(\ell+n-1)$	$\binom{n+\ell}{n} - \binom{n+\ell-2}{n}$

Exercise

1. Show that the coordinate functions $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ restricted to the sphere S^n form a basis of the first eigenspace on S^n

2. Show that the eigenvalue counting function of the Laplacian on the sphere S^n satisfies the asymptotics $N(\lambda) = \frac{2}{n!}\lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$
And the power in the remainder estimate cannot be improved。

§ 02-5 譜的完備性

球諧函數 $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k$ 構成 $L^2(S^n)$ 的一組完備正交基（由 Stone-Weierstrass 定理保證）。因此，Δ_{S^n} 的譜僅包含 $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$，無其他特徵值。

§ 03 n=2 時
譜 $\lambda_k = k(k+1)$
重數 $\dim \mathrm{H}_k = 2k+1$
此推導結合了微分幾何（流形上的拉普拉斯算子）、譜理論（特徵值問題）和調和分析（球諧函數），是微分幾何與數學物理的經典結果。

回顧：

極座標 $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

球座標 $\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + ... = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + ...$

§ 04 我問：沒有計算 Laplace 算子的徑向部分是因為我們只在球面上討論嗎？
DeepSeek 給了一個「很師父式」的回答：「是，也不是。」

是：因為我們最終關注的是球面上的算子 Δ_{S^n} ，所以結果只涉及球面部分。

不是：在推導過程我們必須考慮整個空間的 Laplace 算子(包括徑向部分)，因為齊次調和的條件是全局的。徑向部分的計算是推導中不可或缺的部分。

為什麼徑向部分消失在最終結果中？
1. 分離變量的本質

- 當我們要求 $P=r^k f_k(\theta)$ 在整個 $\mathbb{R}^{n+1}$ 調和時，徑向部分的貢獻被 **完全吸收** 到係數 $k(k+n-1)$ 中。
- 最終結果 $\Delta_{S^n} f_k=-k(k+n-1)f_k$ **僅依賴於球面度量**，因為徑向部分的作用已通過全局調和條件耗盡。

2. 球面算子的內在性

Laplace-Beltrami 算子 Δ_{S^n} 是 S^n 的 **內在微分算子**（由球面度量張量誘導），其譜理論只需考慮球面上的函數空間 $L^2(S^n)$。徑向部分在歐氏空間中的作用是 **橋樑**，將問題轉化為純球面問題。

以上實在說 沒看懂

若忽略嵌入空間，直接在 S^n 上定義 Δ_{S^n}，則需要：

1. 通過球面度量張量 g_{ij} 顯式寫出算子：

$$\Delta_{S^n} f=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j f\right).$$

2. 求解特徵方程 $\Delta_{S^n} f=\lambda f$，這在高維球面上極為複雜（需用特殊函數或對稱性）。

此技巧體現了子流形譜理論的經典策略：通過嵌入空間的結構（如歐氏空間的調和函數），間接推導子流形（如球面）的譜性質。
徑向部分在此扮演了幕後推手的角色。

S^3 $\lambda_k=k(k+2), k=0,1,2,\ldots$ 特徵空間由球諧函數構成 $m_k=(k+1)^2$

k	**特徵值** λ_k	**重數** m_k	**說明**
0	0	1	常數函數
1	3	4	線性限制到 S^3
2	8	9	次二球諧
3	15	16	...
⋮	$k(k+2)$	$(k+1)^2$	...

所以，譜是 $Spec(-\Delta_{S^3})=\{k(k+2)$ with multilicity $(k+1)^2 \mid k\in N_0\}$

§ S^3 的譜有特別的物理意義嗎？

1. 對稱性：$S^3\cong SU(2)$ 的群結構，使其成為規範場、自旋系統、手徵費米子的理想模型。
2. 拓撲性質：作為緊緻單連通的三維流形，其譜是量子重力路徑積分的基準點。

3. 解析可解性：譜的顯式公式 $\lambda_k = k(k+2)$ 為物理問題提供嚴格解析解，成為檢驗量子場論、宇宙學數值模擬的基石。

§ 最後我天馬行空問了一個問題：有球狀鼓嗎？
DeepSeek 先說實際樂器二維球面鼓的不可行，又說碳 60 分子(富勒烯)接近球狀，其電子能級和分子振動模可用 S^2 譜近似（因對稱性高）。
二維球面駐波模擬：
https://www.youtube.com/watch?v=wvJAgrUBF4w

§ 此處我們討論的是球面 S^n 自身的 Laplace-Meltrami 譜問題是無邊界的閉流形固有值問題，不屬於 Dirichlet 或 Neumann 類型。

核心特徵：
1. 零特徵值 $\lambda_0 = 0$ 的存在(常函數解)。
2. 譜結構完全由流形內在幾何（曲率、對稱性）決定。

Dirichlet/Neumann 的應用場景：僅當球面作為更高維區域的邊界時（如球體內部或外部問題）。

§ 丘成桐的推測
The existence of embedded minimal surfaces and topology of three-dimensional manifolds (by Shing-Tung Yau)推測：
在 S^3 中，所有嵌入的極小子流形(如赤道 S^2 、Clifford 環面等)的第一非零特徵值滿足 $\lambda_1(M) = 2$

丘成桐研究 S^3 內部的子流形（如二維曲面），而非 S^3 自身。這些子流形繼承 S^3 的曲率約束，但擁有獨立的譜結構。

核心要素	S^3 自身譜	丘成桐推測（子流形譜）
數學本質	閉流形的內在譜	子流形在環境曲率下的誘導譜
算子	Δ_{S^3} (Laplace-Beltrami 算子)	Δ_M 子流形誘導度量的 Laplace 算子）
譜	$\lambda_k = k(k+2)$	第一非零特徵值 $\lambda_1(M)$
數值關聯	$\lambda_1(S^3) = 3$	$\lambda_1(M) = 2$（嚴格更小）
幾何核心	常曲率 +1 的對稱性	極小子流形在對稱環境中的剛性

物理詮釋	背景時空的量子漲落	膜宇宙的振動模

丘成桐推測揭示了 S^3 高對稱性對子流形譜的強制約束，將背景流形的譜理論深化至子流形層次，是微分幾何與數學物理的深刻交叉。

與 CMC 穩定性的關聯

對 S^3 中中嵌入的閉 CMC 曲面M（維度=2)，丘成桐與合作者證明：

穩定性 $\Rightarrow \lambda_1(\Delta_M) \geq 2 \Rightarrow$ 幾何剛性(如 $|A|^2 = 2$)

並提出譜等值猜想（$\lambda_1 = 2$）以探索極小子流形的分類。此工作奠定幾何分析在 CMC 曲面與廣義相對論的應用基礎。

穩定性與曲率控制的物理意義：

1. 膜宇宙(brane)的穩定性
2. 流體介面(毛細現象)與黑洞視界

質量為零的 Dirac 算子 D 的譜

Dirac 算子的特徵值為

$$\lambda_k^{\pm} = \pm\left(k + \frac{3}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

這裡的 k 對應於球諧展開中的等級（來自 $SU(2) \cong S^3$ 的表示理論）。

每個特徵值 $\pm\left(k + \frac{3}{2}\right)$ 的重數是

$$m_k = (k+1)(k+2)$$

所以，對稱性保證了正負特徵值有相同的重數。