

§ The Rayleigh quotient

(M, g) 是一個 compact Riemannian manifold, $-\Delta f = \lambda f, f|_{\partial M} = 0$

瑞利商 $R(f) = \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV}$, 能量與總質量的商。

特徵函數恰好是那些能讓 $R(f)$ 取得極值的函數, 對應的 $R(f)$ 值就是特徵值。

例 振動弦

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 兩端固定, 弦長=L。分離變數後, $u(x, t) = f(x)T(t)$

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f, f(0) = f(L) = 0, \text{ Rayleigh 商} = \frac{\int_0^L |f'(x)|^2 dx}{\int_0^L f(x)^2 dx}$$

分子: $\int_0^L |f'(x)|^2 dx$ 正比於弦因彎曲而儲存的彈性能量 (能量越大, 表示弦的形變越劇烈)。

分母: $\int_0^L f(x)^2 dx$ 可視為一種質量加權的振幅平方 (與系統的慣性有關)。

因此, Rayleigh 商 $R(f)$ 代表的是「單位振幅平方所具有的彈性能量」。

最小化這個比值意味著找到一種振動模式 (特徵函數), 能以最少的能量達到一

定的振動幅度, 這對應的就是系統最基本的振動模式 (基模), 其值 λ_1 即為基頻的平方。

幾何意義:

分子測量了函數 f 在流形上的變化率總和。如果 f 在流形上劇烈波動, 這個值會很大。

分母測量了函數 f 的總強度。

Rayleigh 商的作用: 因此, $R(f)$ 衡量的是函數 f 的平均變化率。

要最小化 $R(f)$, 就是尋找一個最「平滑」的函數, 它在滿足邊界條件的前提下, 盡可能地不劇烈變化。

$$\text{§ 等周商 } IQ = \frac{(\text{Area}(\partial\Omega))^n}{(\text{Vol}(\Omega))^{n-1}}$$

$$\text{例如 } n=2, IQ = \frac{(\text{length}(\partial\Omega))^2}{(\text{Area}(\Omega))} \text{ 最小值} = \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi$$

瑞利商與等周商的類比:

瑞利商衡量一個函數與最低能量態（基態）的偏離程度。

瑞利商的極小值由特徵函數 f_1 達成，這個函數描述了系統最平滑、最基礎的振動模式。特徵函數是函數空間裡的理想模型。

等周商衡量一個區域與最完美形狀（圓）的偏離程度。

等周商的極小值由圓（或更高維中的球）達成，這個形狀是幾何上最對稱、完美的形狀。圓是幾何形狀空間裡的理想模型。

更深層的連結：Cheeger 常數

$$h(M) = \inf_{\Omega} \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{\text{Vol}(\Omega)}, \text{ Cheeger 不等式: } \frac{|h(M)|^2}{4} \leq \lambda_1$$

這個不等式表明了一個幾何上的限制（沒有小瓶頸）會導致一個分析上的下界（特徵值不會太小）。

它將「等周商」的思想（尋找最小的邊界面積與體積之比）和「瑞利商」的極值（特徵值 λ_1 ）直接綁定在一起。

瑞利商和等周商共享著同一套哲學：通過尋找一個比率的極值來揭示系統（無論是函數空間還是形狀空間）最根本、最內在的屬性。

Rayleigh 商是變分本徵值的工具，等周長定理是底層幾何約束，而 Cheeger 不等式使用這些幾何不等式提供算子譜的估計。



[Jeff Cheeger](#) 1943~ [Fan Chung](#) 1949~[Dario Trevisan](#)

Fan Chung 即金芳蓉