§ 何謂格林函數(Green function)

§ Distribution

這裡的所謂分佈就是作用在測試函數空間上的連續性泛函(functional)。

D(M)：{Smooth functions with compact support on M}測試函數所成的集合。

A distribution $\mathrm{T{:}D(M)} \to \mathrm{R}$ ，$\varphi \to \mathrm{T}\varphi$

$\mathrm{D'(M)}$ ：{M 上的分佈集}

$<\mathrm{T},\varphi> := \mathrm{T}\varphi$

Examples：

1. Dirac distribution δ_a

   $<\delta_a,\varphi> := \varphi(a)$ for all $\varphi \in D(M)$

$<T_f,\varphi> := \int_M f\varphi dV_g$ regular distribution associated to f。

§ 格林核(Green function)

$M = R^n, \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 我們要找一個函數 G(x)使得 $\Delta G(x) = \delta(x)$

這就是格林函數的定義：**它是 Laplace operator 的分佈反算子**，即 Δ^{-1} 。

在一維情況，這等式變為：$\frac{d^2G(x)}{dx^2} = \delta(x)$

$G(x) = -\frac{1}{2}|x|$

$n \geq 3$時，Laplace 方程的基本解為：$G(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \times \frac{1}{|x|^{n-2}}, x \neq 0$ ，ω^n 是 R^n 單位球的體積。

我們不要求等式在每一點都成立，而是對任意試驗函數$\phi \in D(R^n)$ （ 這個函數在 x=0 發散。）

$\int_{R^n} G(x)\Delta\phi(x)dx = \phi(0)$

也就是說，G 作為對偶作用的泛函，實現了δ的功能。

要解一個 Poisson 方程$\Delta u(x) = f(x)$

只要能將 f 寫為一個分佈，就可以用格林核來表示：$u(x) = \int_{R^n} G(x-y)f(y)dy$

這其實就是捲積(convolution) $u = G * f$

The fundamental solution of the heat equation $u_t = ku_{xx}$ is $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp(-\frac{x^2}{4kt})$

(heat kernal) $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)dx = 1$

在黎曼流形 M 上的格林核：

在更一般的黎曼流形 M 上，若 Δ_g 是 Laplace-Beltrami operator，則格林核 G(x,y)

滿足 $\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$

即：對固定 y，把 G(x,y)看成 x 的函數，它是滿足以 y 為奇異源的 Poisson 解。

這裡 $\delta_y(x)$ 是一個**分佈**，所以 G(x,y)也不是通常意義下的光滑函數（它在對角線 x=y 奇異），但它在 $D'(M \times M)$ 中是良定的。

格林核與譜理論的關係

你可以將格林核表示為拉普拉斯算子的譜分解：$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(y)}{\lambda_n}$

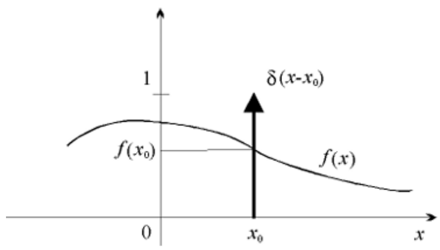
其中 $\{\phi_n\}$ 是 Δ 的本徵函數，$\{\lambda_n\}$ 是本徵值。

- 如果 M 是緊的，這個和是收斂的；
- 如果 M 是非緊的（如 $\mathbb{R}^n$），這變成積分形式（連續譜）；
- 此和在對角線 $x = y$ 上發散 ⇒ $G(x,y)$ 是一個**分佈**。

概念	意義
格林核 $G(x)$	是 Laplacian 的基本解，即滿足 $\Delta G = \delta$ 的分佈解
為什麼是分佈	因為 G 在原點奇異，不是光滑函數，但對試驗函數作用是良定的
與譜理論關係	格林核可透過本徵展開定義，說明它與算子的反算子密切相關
在黎曼流形上	格林核 $G(x,y)$ 是 Δ_x 的反算子核心，在 $x = y$ 奇異，屬於分佈 $\mathcal{D}'(M \times M)$

先解釋何謂 Dirac 函數。嚴格說應該是說 Dirac 分布(一種廣義函數)：

δ(x)=$\begin{cases} 1, x=0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$



Sifting property of the Dirac distribution.

若 f(x)是一連續函數則

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), x_0 \in (x_1, x_2)$$

在 R 上的熱方程 $u_t - ku_{xx} = 0$ ，其基本解為 $\mathrm{G}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp(-\frac{x^2}{4kt})$ 稱為熱核 (heat kernel)

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t), t > 0 \\ u\big|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$ 的解為

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)g(y)dy$ 寫成 $(G*g)(x)$ 稱為 convolution(褶積)

以上是在 PDE 熱方程的簡單結論。其中 G(x,y)就是 Green 函數。

Green function 是解微分方程的重要工具。

對於一個線性微分算子L，微分方程為 $Lu(x) = f(x)$

Green 函數定義為滿足 $LG(x,s) = \delta(x-s)$ 的函數 G(x,s)

一旦找到 G(x,s)，則原方程的解為 $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s)f(s)ds$

其中的 Dirac 函數是一種分佈。

這意味著 G(x,y)是算子 L 的逆算子的積分核（integral kernel）。

例 求解 $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$ ， $u(x,0) = 0$

f(x,t)是熱源函數，看作是無數個「瞬間點熱源」的疊加。

若熱源不是一個分布函數 f(x,t)，而是一個無限集中瞬間爆發的點熱源，系統會如何反應？

考慮 $\frac{\partial G}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-s)\delta(t-t')$

其中 $G(x,t;s,t')$ 就是我們要找的 Geen 函數，由 Fourier 變換可以找到 heat kernel

$G(x,t;s,t')=\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha(t-t')}}\exp(-\frac{(x-s)^2}{4\alpha(t-t')})$ for $t>t'$即為所求的 Green 函數。

假設熱脈衝在$t'=0$時發生，則$G(x,t;s,0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\exp(-\frac{(x-s)^2}{4\alpha t})$
在時間t'，於位置 s，有一個強度為 $f(s,t')$的微小熱源，此為小熱源對後來溫度 u(x,t)的貢獻是 $f(s,t')\times G(x,t;s,t')$
疊加起來得，

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;s,t')f(s,t')dsdt'=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha(t-t')}}\exp(-\frac{(x-s)^2}{4\alpha(t-t')})f(s,t')dsdt'$$

格林函數實際上是通過與測試函數ϕ的積分來作用：

$u(x)=\int G(x,y)\phi(y)dy$，將$\phi$映射到 u(x)，這符合分佈的定義。

在譜理論中，格林函數與算子的譜分解（spectral decomposition）密切相關：

1. 離散譜與連續譜
   (1) 若 L 有離散譜（例如量子力學中的哈密頓算符），格林函數可以寫成特徵函數的級數：$G(x,y)=\sum_n\frac{\psi_n(x)\psi_n^*(y)}{\lambda}$
   (2) 若 L 有連續譜（例如自由粒子的 $-\Delta$），格林函數可能涉及積分：
   $G(x,y)=\int\frac{\psi_k(x)\psi_k^*(y)}{k^2}dk$
2. 解析延拓與譜測度

例

1. 一維薛丁格算子
   考慮$L=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$，其 Green function $G(x,y;\lambda)$滿足：
   $(L-\lambda)G(x,y;\lambda)=\delta(x-y)$
2. Laplace operator 的 Green function
   在R^3中，$-\Delta$的 Green function 是$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}$
   它在 x=y 處不可積，但作為分佈，可以通過正則化（如傅立葉變換）定義其作用。

為什麼基本解是分佈？

1. **初始條件涉及 δ 函數**：$K(x,0)=\delta(x)$ 不是普通函數，而是分佈（廣義函數）。
2. **積分表示解**：熱方程的解可寫成卷積：

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\,u_0(y)\,dy,$$

   其中 $u_0(y)$ 是初始條件。這正是分佈（格林函數）與函數的作用方式。
3. **奇異性**：當 $t\to 0^+$，$K(x,t)$ 收斂到 δ 函數，這在傳統函數空間無法描述，必須用分佈理論。

熱方程的基本解不僅是格林函數的特例，也是分佈理論和譜理論在偏微分方程中的經典應用。