§ What is the Sobolev space

§ 先解釋一下 L^2 space，平方可積的 Hilbert 空間。

$\Omega \subset R^n$ ， $L^2(\Omega) = \{ f : \Omega \to C \left| \int_\Omega \right| f(x) \right|^2 dx < \infty \}$

1. 有良好定義的內積 $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$
2. 是一個完備空間：
   即所有在該空間中的柯西序列（Cauchy sequence）都收斂到該空間中的某個元素。
3. 這讓我們能做出正交投影、傅立葉展開、最小平方逼近等分析操作。

§ 何謂 Sobolev 空間，簡單地說：

Sobolev 空間 H^k 就是所有 k 階弱導數存在且平方可積的函數所形成的空間。

以一維為例：$\Omega \subset R$ 是一個開區間。

Sobolev 空間為：

$W^{k,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) \middle| D^\alpha f \in L^p(\Omega), \text{for all } |\alpha| \le k \}$

其中 $D^\alpha f$ 表示 f 的弱導數。

例 $\mathrm{H}^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ：所有 k 階弱導數在平方意義下可積的函數空間。

是最常用的 Sobolev 空間之一。

我們再回顧一下：

一個函數 $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ ，若對所有測試函數 φ ，$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx$ 成立，則稱 g(x)是 f(x)的弱導數。

例 $f(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ 這是一個「階躍函數」，在 x=0 不連續，當然無法「可微」。

但在 Sobolev 空間中，可以計算其弱導數，結果是某種分佈（類似狄拉克 delta 函數的東西），這使得我們仍可以在方程中使用它。

Sobolev 空間是數學物理、變分法與偏微分方程中不可或缺的工具，例如熱方程的解往往只能在 H^1 中尋找弱解。

§ 內積

$< u, v >_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv dx + \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > dx$