§ weak derivative and weak solution

譜理論誕生於從二十世紀初，源自 David Hilbert 的 Hilbert space theory，該理論是在積分方程的背景下發展起來的。

在譜理論出生後幾年，人們發現它能解釋原子的發射光譜(spectra of the atoms)。

Hilbert 空間與光譜有了美麗的邂逅。

現在，關於量子力學有兩個主要的假設：

1. 量子系統的態由複 Hilbert 空間 H 的非零向量描述。
2. 這些可觀察量由自伴隨線性算子表示$T:H\to H$

一個狀態$u\in H$提供了每個可能測量結果的機率分佈，一個可觀察的$T:H\to H$提供一個可被測量的物理量(例如位置或動量)。

Stone 定理：

假設$T:H\to H$是一自伴隨算子，則這個演化方程$\partial_t u=iTu, u(0,\cdot)=u_0\in H$的解

由$t\to u(t)=U_t u_0$給出，其中$(U_t)_{t\in R}$是由$U_t\equiv e^{itT}$所定義的么正群(unitary group)。

當$T=\partial_x^2$，上述的方程即為薛丁格方程。

這個定理出現了 T 與 H，還需要仔細思量。

路途還很遙遠，我們先看懂以下兩個基本觀念：

弱導數與弱解。

在抽象的定義之前，先看簡單的例子。

以下的計算注意到φ,φ'在邊界值皆為 0，即所謂的 compact support。

§ 弱導數(weak derivative)

若一個函數 f 雖然不可微（傳統意義），但它在積分中與某個函數 g 表現得就像是有導數，那我們就稱 g 為 f 的弱導數。

定義：

Let $f\in L^1_{loc}(R)$(locally integrable)，if $\int_R f(x)\varphi'(x)dx=-\int_R g(x)\varphi(x)dx$ for all

$\varphi(x)\in C_c^\infty(R)$，then $g(x)\in \mathrm{L}^1_{loc}(R)$ is called the weak derivative of f(x)。

這裡，$\varphi(x)$稱為測試函數，是 compact surppose。

例 $f(x)=|x|$ 在 x=0 不可微。

$f'(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$作為 f(x)的 weak derivative。即$g(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$是 f 的弱導數。

驗證一下$\int_R |x|\varphi'(x)dx=-\int_R g(x)\varphi(x)dx$ （因為$\varphi(x)\in C_c^\infty(R)$，它與其導數在邊界

都為 0)

$$\int_R |x|\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (-x)\varphi'(x)dx + \int_0^{\infty} x\varphi'(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} (-x)\varphi'(x)dx = -x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx$$

$$\int_0^{\infty} x\varphi'(x)dx = x\varphi(x)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x)dx = -\int_0^{\infty} \varphi(x)dx$$

兩者合併，得 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx$

由定義，g(x)是 $f(x) = |x|$ 的弱導數。

§ 弱解(weak solution)

例 Poisson equation $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset R^n$

Strong/calssical solution 要滿足

1. $u \in C^2$
2. 滿足上式每一點都成立。

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi(x)dx = \int_\Omega f\varphi dx \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \quad \text{for all} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

定義：

若 $u \in H^1(\Omega)$ 且 $\int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$ 對所有的 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 都成立。則 u 即為此 Poisson 方程的弱解。

Green 第一公式：

$$\int_\Omega \nabla u \bullet \nabla v dx = -\int_\Omega (\Delta u)v dx + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}dS \quad 其中 \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \bullet n$$

$-\Delta u = f$ 兩邊積分

$$\int_\Omega (-\Delta u)\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \quad 其中 \varphi \in H_0^1(\Omega) 是任意測試函數$$

由 Green 第一公式，左式 $= \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \varphi dx$，因此 u 合乎若解的定義。

例 $\Omega = (0,1)$，$\begin{cases} -u''(x) = 1, x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

則 $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ 是 strong(classical)solution。

以下驗證一下 $v(x)=\begin{cases} x(1-x), x\in(0,1) \\ 0, other \end{cases}$ 是一個 weak solution。

$\int_\Omega \nabla v \bullet \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$ 即為 $\int_0^1 (1-2x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx$ (f(x)=1)

其中左式 $\int_0^1 (1-2x)\varphi' dx = (1-2x)\varphi\Big|_0^1 + \int_0^1 2\varphi dx = \int_0^1 2\varphi dx$ (integration by parts)

又 $\int_0^1 v'(x)\varphi'(x)dx = v'(x)\varphi'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 v''(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 v''(x)\varphi(x)dx$

對所有的測試函數 φ ，$\int_0^1 2\varphi(x)dx = -\int_0^1 v''(x)\varphi(x)dx$ 都成立，

所以 $v''(x)=-2$ 。

所以，儘管 v'' 在經典意義下不存在(在 x=0 與 x=1 微分不存在)，但它有一個 $-v''=2, v(0)=v(1)=0$ 弱導數為常數-2。

因此它是 PDE $-v''(x)=2, v(0)=v(1)=0$ 的弱解。

例

Poisson 方程 $-\Delta u = f$ ，$\Omega=(0,1)\times(0,1)\subset R^2$ ，其中 $f(x,y)=2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

其 classical 解為 $u(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

這也是一個弱解。以下驗證 $\int_\Omega \nabla u \bullet \nabla v dxdy = \int_\Omega fv dxdy$

$\nabla u = (\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y), \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y))$

$\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$

左式=$\int_0^1\int_0^1 (\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)\frac{\partial v}{\partial x} + \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y)\frac{\partial v}{\partial y})dxdy$

integration by parts

$\int_0^1 \cos(\pi x)\frac{\partial v}{\partial x}dx = \cos(\pi x)v - \int_0^1 v(-\pi\sin(\pi x))dx = \pi\int_0^1 \sin(\pi x)v dx$

$\pi\int_0^1\int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi y)\frac{\partial v}{\partial x}dxdy = \pi\int_0^1 (\sin(\pi y)\int_0^1 \cos(\pi x)\frac{\partial v}{\partial x}dx)dy$

$=\pi^2\int_0^1 \sin(\pi y)\int_0^1 \sin(\pi x)v dxdy = \pi^2\int_0^1\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(\pi y)v dxdy$

同理 $\int_0^1\int_0^1 \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y)\frac{\partial v}{\partial y})dxdy = \pi^2\int_0^1\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(\pi y)v dxdy$

合併得左式 $=2\pi^2\int_0^1\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(\pi y)v dxdy = \int_0^1\int_0^1 fv dxdy$

後記：

測試函數(test function) $\varphi(x)$ 還在其他地方出現：

1. 分佈理論 例如 Dirac delta $\delta(\varphi) := \varphi(0)$ for all $\varphi \in C_c^\infty(R)$
2. Sobolev 空間的定義 定義弱導數
3. PDE 弱解的定義 定義積分恆等式
4. 變分法 定義變化方向
5. 有限元素法 定義試驗空間與基底
6. Fourier 分析中的核與收斂性 定義弱收斂與卷積核
7. 建構某些 PDE 的基本解 與 δ 函數作用建立解
8. Microlocal 分析 探測奇異點與頻率