§ 比較熱核方法與 Green 函數方法

在譜理論中，熱核方法（heat kernel method）與格林函數方法（Green function method）皆是研究微分算子譜性質的重要工具，兩者之間存在深刻的聯繫，但關注的視角與應用場景有所不同。

一. 定義

熱核：

設 L 是一個自伴非負的橢圓微分算子（例如拉普拉斯算子 $-\Delta$），其熱核

K(t,x,y)是熱方程的解核：$(\partial_t + L)K(t,x,y) = 0, K(0,x,y) = \delta(x-y)$

形式上可寫成 $K(t,x,y) = \langle x | e^{-tL} | y \rangle$

熱核給出了算子 L 的指數衰減演化半群。

Green 函數：

格林函數 G(x,y)是算子 L 的預解式核（通常考慮 L 的逆或預解式）:

$LG(x,y) = \delta(x-y)$

形式上可寫成 $G(x,y) = \langle x | L^{-1} | y \rangle$

這要求 L 可逆（即零不在譜中），否則需考慮預解式 $(L-\lambda)^{-1}$

二. 兩者關係的核心：Laplace 變換

熱核與格林函數通過積分變換相互聯繫：

(1) 從熱核到 Green 函數：

若 L 為正定算子（譜下界大於零），其格林函數可透過熱核積分得到：

$G(x,y) = \int_0^\infty K(t,x,y)dt$ ，這對應算子的關係 $L^{-1} = \int_0^\infty e^{-tL}dt$

(2) 從 Green 函數到熱核：

熱核可透過格林函數的反拉普拉斯變換（或譜表示）獲得，但通常更直接地透過熱方程求解。

(3) 推廣到含譜參數的情況：

對於預解式 $(L-\lambda)^{-1}$，其積分核 $G_\lambda(x,y)$ 與熱核的關係為：

$$G_\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda t} K(t,x,y)\, dt \quad (\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \text{ 或透過解析延拓})$$

這本質上是拉普拉斯變換。

三. 譜理論中的角色對比

熱核方法	格林函數方法
關注算子半群 e^{-tL}	關注算子的逆或預解式 $(L-\lambda)^{-1}$
適合研究**小時間漸近**（$t \to 0^+$），連結幾何與譜（如短程行為）	適合研究**譜分解**、方程解的存在性與奇點結構
透過 $\mathrm{Tr}(e^{-tL}) = \sum e^{-t\lambda_n}$ 獲得譜求和，常用於ζ函數正則化	透過奇點分析譜（如格林函數的極點對應本徵值）
常用於計算**譜不變量**（如熱係數 a_n 關聯幾何量）	常用於**散射理論**、**微擾計算**

四. 深層聯繫範例

(1) ζ函數正則化

算子的ζ函數定義為：

$$\zeta_L(s) = \sum \lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \mathrm{Tr}(e^{-tL})\, dt$$

這裡 **熱核的跡** 提供了ζ函數的積分表示，進而可定義行列式：

$$\det L = \exp(-\zeta_L'(0))$$

而格林函數在 $s=1$ 時與ζ函數相關（若 L 為拉普拉斯算子）。

(2) 短程與長程行為

- 熱核 $K(t,x,y)$ 在 $t \to 0^+$ 時的展開（Minakshisundaram–Pleijel 展開）反映局部幾何。
- 格林函數 $G(x,y)$ 在 $|x-y| \to \infty$ 時的衰減反映譜間隙（例如質量隙）。

兩者透過積分變換互補：熱核控制短程（紫外），格林函數控制長程（紅外）。

五. 應用場景

(1) 熱核方法

幾何中的熱方程證明（例如 Atiyah–Singer 指數定理）。

量子場論的有效作用量計算（背景場方法）。

流形上的譜幾何（Weyl 定律、曲率項）。

(2) Green 函數方法

偏微分方程解的正則性與奇點分析

散射理論中的共振計算

多體物理中的關聯函數（例如兩點函數）

總結：

熱核與格林函數是同一算子的不同表示：

熱核是「時間域」表示（指數衰減半群），強調譜的整體分佈與幾何局部性。

格林函數是「能量域」表示（預解式），強調譜的逐點性質與方程的解。

它們的橋樑是拉普拉斯變換，在譜理論中互為補充：

熱核更適合微展開與幾何不變量，格林函數更適合分析譜的離散性與方程的邊值行為。

在具體問題中，常根據需要切換視角，例如透過熱核計算 ζ 函數，再透過 ζ 函數研究格林函數的奇點。

§

1. Sturm-Liouville 定理：譜分解的經典範例

對於一個標準的 Sturm-Liouville 算子（在區間[a,b]上）：

L=$-\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}]+q(x)$ 配合適當的邊界條件（如 Dirichlet、Neumann），該定理保證：

(1) 存在一組完備的正交基：由特徵函數$\{\phi_n(x)\}$構成。

(2) 譜是純點譜：對應的特徵值$\{\lambda_n\}$是離散的、實數，並可排序至無窮大。

(3) 任何函數可展開為廣義傅立葉級數 $f(x)=\sum_n c_n\phi_n(x)$

(4) 算子的作用等於在譜空間的乘法： $Lf(x)=\sum_n \lambda_n c_n\phi_n(x)$

這本質上就是算子的譜分解。

2. Green 函數作為 Sturm-Liouville 理論的核實現

3. 熱核作為 Sturm-Lioville 理論的時間演化實現

結論：

1. 基礎與推廣：Sturm-Liouville 定理是有限區間上一維自伴橢圓算子譜理論的典範。它明確地給出了譜分解。
2. 具體實現：在 Sturm-Liouville 框架內，熱核和格林函數都可以通過該譜分解顯式地表達出來。它們是該定理最直接、最有用的應用之一。
3. 方法論的延伸：熱核與格林函數方法的重要性在於，它們超越了經典 Sturm-Liouville 理論的嚴格限制。它們可以被定義和研究於：

- 高維流形（無全域可分離變數）。
- 連續譜與混和譜存在的情況（如非緊緻空間）。
- 算子不是簡單的微分算子時（如擬微分算子）。

在這些更一般的情況下，雖然可能沒有離散特徵函數組成的完備正交基，但熱核（通過半群）和格林函數（通過預解式）仍然是研究譜性質、求解方程和連結幾何的有效分析工具。

簡言之，Sturm-Liouville 定理展示了譜分解「應該是什麼樣子」；而熱核和格林函數方法，則是實現、推廣和應用這一強大思想，並將其延伸到更複雜數學與物理情境的兩大主力分析技術。