§ hyperbolic plane

左圖是所謂 non-compact pseudosphere(Pocare 模型)

$H=\{(x,y)|y>0, x,y\in R\}$ with metric

$ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$ ，is called the Poincare half-plane

model，with $g_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{y^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}, g^{ij}=\begin{pmatrix}y^2 & 0\\ 0 & y^2\end{pmatrix}$

The Laplace-Beltrami operator is $\Delta=y^2(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2})$

The spectrum of the Laplace-Beltrami operator on the hyperbolic plane H (Poincaré half-plane model) is purely continuous and consists of all real numbers $\lambda\geq\frac{1}{4}$ ，

$Spec(H)=[\frac{1}{4},\infty)$

The hyperbolic plane is a non-compact symmetric space of constant negative curvature。
The spectrum of Δ is entirely continuous，with no discrete eigenvalues。

Solve $\Delta f=\lambda f$ leads to a continuous spectrum starting at $\lambda=\frac{1}{4}$ 。

解的形式為 $f(x,y)=e^{i\xi x}\cdot y^{1/2}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\xi|y)$ 其中 K_v 是修正 Bessel 函數

參數化 $\lambda=s(1-s)$ ，令 $s=\frac{1}{2}+it$ 則 $\lambda=(\frac{1}{2}+it)(\frac{1}{2}-it)=\frac{1}{4}+t^2\geq\frac{1}{4}$

§ non-compact pseudosphere (不是 pseudosphere)

在 non-compact pseudosphere 上的 Laplace-Beltrami 算子的譜與雙曲平面 H 的譜相同。

該譜的下界 $\lambda_0=\frac{1}{4}$ 源於平面的常數負曲率。

當曲率歸一化為-1 時，若曲率為 -K(K>0)，則下界為 $\frac{K}{4}$ 。

非緊緻偽球面與雙曲平面都具有常負曲率，因此譜結構一致。

由曳物線(tractrix)旋轉生成的緊緻偽球面的譜是離散的。