

Spectral Theory in Riemannian geometry by Olivier Lablee

§ 01 各領域的比較

領域	核心關注	主要算子	核心方法
Spectral theory	算子譜與泛函分析	Laplacian	泛函分析
Spectral 幾何	幾何 $\leftrightarrow$ 譜	Laplacian	Heat kernel, Weyl law
Spin 幾何	Spin 結構 Dirac 譜	Dirac operator	Clifford algebra, Index theory
幾何分析	PDE 解幾何問題	Laplacian	變分法, Flows

§ 02 Introduction

$\mathbb{R}^3$ 中, Laplace operator (Laplacian) $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

黎曼流形(M, g)中, Laplace-Beltrami operator $\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j)$

(註: Jacobi operator $J = \Delta + |A|^2 + \text{Ric}(N, N)$; Morse index 是 Jacobi operator 的負 eigenvalue 個數, 即, $\text{Index}(J) = \#\{\lambda < 0 | J\phi = \lambda\phi \text{ 有非零解}\}$)

在譜理論中, Laplace 算子定義在 $\mathbb{R}^n$ 上, Laplace-Beltrami 算子定義在黎曼流形上, 它們都作用在函數上。

核心目標都是在求解 $\Delta f = \lambda f$ 或 $\Delta_g f = \lambda f$, 並研究譜 $\{\lambda_n\}$ 和特徵函數空間 $\{f_n\}$ 的性質。這些譜反映了空間(區域或流形)的幾何和拓撲信息。

Laplace-Beltrami 算子可以進一步推廣到作用在微分形式上, 稱為 Hodge-Laplace 算子 $\Delta = d\delta + \delta d$ (d 是外微分, δ 是其伴隨算子)。

§ 03 問題與反問題:

1. Direct problems

- (1) Compute $\text{Spec}(M, g)$, the first non-null eigenvalue λ_1
- (2) Properties of $\text{Spec}(M, g)$

2. Inverse problems

- (1) $\text{Spec}(M, g)$ 決定了 M 的 dimension, volume, the integral of scalar curvature (over M)
- (2) Isospectral problem: Can we hear the shape of a drum?
If $(M, g), (M', g')$ are isospectral, are they isometric?
J. Milnor 1964 and a planar counter example by C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert 1992

§ 04 Open problems :

1. 是否能完全分類所有 isospectral 但非等距 (non-isometric) 的流形?
2. 已知譜可決定一些特定性質 (例如體積、維度), 但是否可決定所有拓撲不變量尚不清楚。
3. 傳統譜幾何多研究拉普拉斯-貝爾特拉米算子 (Laplacian), 但現代問題也包括其他算子: 對這些算子的譜與幾何/拓撲性質之間的關聯研究尚不完全。

(1) Hodge-Laplacian (作用於微分形式)

(2) Dirac operator (特別在弦論與指標定理中)

(3) Schrödinger operator (與量子幾何有關)

4. 給定一類隨機結構, 其譜的分佈有何統計性質? 是否存在集中現象或普遍行為? 這與數理物理、隨機矩陣理論 (RMT) 等領域交叉。
5. 譜與量子混沌
在負曲率流形上, 拉普拉斯算子的譜與古典力學的混沌行為有何對應? 這與 Berry、Sarnak、Zelditch 等人的研究有關, 是物理與數學交界的重要問題。
6. 計算譜不變量的穩定性與可識別性

§ 05 伴隨算子(adjoint operator)

設 H 是一個希爾伯特空間 (一個完備的內積空間), 帶有內積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。

- 一個稠密定義 (densely defined) 的線性算子 $A : D(A) \rightarrow H$ (其中 $D(A) \subseteq H$ 是算子的定義域) 是 self-adjoint, 如果它滿足:

$$A = A^*$$

這裡 A^* 是 A 的伴隨算子, 且這個等式包括定義域相同, 即 $D(A) = D(A^*)$ 。

- 伴隨算子 A^* 的定義是: 對於所有 $x \in D(A)$ 和 $y \in D(A^*)$, 有

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

因此, 當 $A = A^*$ 時, 上述條件變成:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in D(A).$$

這表示算子 A 在內積意義下是"對稱"的。

- **定義域的重要性**：在無限維空間中，self-adjoint 不僅要求算子形式上的對稱（即 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ），還要求定義域 $D(A)$ 必須足夠"大"（稠密），且與 $D(A^*)$ 完全相同。這是 self-adjoint 與單純對稱算子（symmetric operator）的主要區別（對稱算子只要求 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ，但定義域可能較小）。
- **在有限維空間的簡化**：如果 H 是有限維（例如 $\mathbb{C}^n$ 或 $\mathbb{R}^n$ ），則 self-adjoint 算子對應於：
 - 複數空間：Hermitian 矩陣（即矩陣 A 滿足 $A = A^\dagger$ ，其中 $A^\dagger$ 是共軛轉置）。
 - 實數空間：對稱矩陣（即矩陣 A 滿足 $A = A^T$ ，其中 A^T 是轉置）。在這種情況下，定義域問題較簡單，因為整個空間就是定義域。

Self-adjoint 算子在數學與物理中的重要應用：

- **實數譜（real spectrum）**：self-adjoint 算子的譜（spectrum，即特徵值的推廣）全部是實數。這在量子力學中至關重要，因為可觀測量（如位置、動量、能量）必須對應 self-adjoint 算子，以確保測量值為實數。
- **譜定理（spectral theorem）**：self-adjoint 算子可以進行譜分解，類似於矩陣的對角化。這允許我們將算子表示為積分形式：

$$A = \int \lambda dE(\lambda),$$

其中 λ 是實數（譜值）， E 是譜測度。這提供了分析算子結構的強大工具。

- **量子力學應用**：在量子力學中，系統的哈密頓算子（Hamiltonian）通常是 self-adjoint，以確保時間演化和測量結果的合理性。
- **穩定性**：self-adjoint 算子生成的么正演化（unitary evolution）是保內積的，這對應於物理系統的守恆律。
- **有限維例子**：在 $\mathbb{C}^2$ 中，矩陣 $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 是 Hermitian（因為 $A^\dagger = A$ ），所以它是 self-adjoint。
- **無限維例子**：在 $L^2(\mathbb{R})$ 空間（平方可積函數空間）中，算子 $Af(x) = xf(x)$ （位置算子）是 self-adjoint，其定義域為 $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int |xf(x)|^2 dx < \infty\}$ 。