§ S^3 的譜

三維球面 S^3 上 Laplace 算子的特徵值集合。

Laplace-Beltrami operator Δ 作用在 $L^2(S^3)$ 上。假設 S^3 的半徑為 1 (截面曲率為 1)。

1. 在 R^4 上定義調和多項式： $\Delta_{R^4} P = 0$ 。 $P(\lambda x) = \lambda^k P(x)$
2. 將上些多項是限制在 S^3 上：Let $f_k(x) = P_k(x)|_{S^3}$, $P_k(x) \in H_k(R^4)$
3. Laplace-Beltrami 算子的作用： $\Delta_{R^4} f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^3} f$
4. 多重度計算
後面的計算回頭去看一般 n 的情形。

結論

1. $Spec(\Delta_{S^3}) = \{\lambda_k = k(k+2), k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. 重數(multiplicity)：每個特徵值 λ_k 對應的重數為 $(k+1)^2$
3. 特徵函數：對應的特徵函數是三維球諧函數 (Spherical harmonics)，可以通過 $SU(2)$ 的不可約表示理論構造出來。它們是 $S^3 \cong SU(2)$ 上雙不變函數空間的基底。
 S^3 是宇宙學模型 (如閉合宇宙模型) 和規範理論 (如楊-米爾斯瞬子模空間的邊界) 中的重要例子，其譜分析是相關研究的基礎。

§ S^3 上的其他算子

1. Hodge-Laplacian：作用在 differential form 上
2. Dirac Operator：考慮 S^3 上的旋量結構 (spin structure)