§ Lichnerowicz – Obata Theorem

Let (M, g) be a closed Riemannian manifold of dimention n such that $Ric \geq k(n-1) > 0$

(i. e. for any $\xi \in TM$ we have $Ric(\xi,\xi) \geq k(n-1)\|\xi\|^2 > 0$)

Then the first nonezero eigenvalue λ_1 of $-\Delta_g$ satisfies $\lambda_1 \geq nk$

Moreover，we have equality if and only if M is isometric to an Euclideans phere of dimension n。

Obata：

如果等號成立(即$\lambda_1 = nk$)則那麼 M 必定是一個常曲率為的標準 n 維球面S^n（以適當的尺度）。

這個定理是微分幾何中關於黎曼流形上的 Laplace operator 譜的一個重要結果，它建立了流形的里奇曲率與其 Laplace operator 最小非零特徵值之間的下界關係，並在達到下界時給出了流形的剛性描述（即流形必須是標準球面）。

1. 設定
   (1) 考慮一個 n 維($n \geq 2$)compact、without boundary Riemannian manifold (M,g)
   (2) 令$\Delta = d^*d = -div(grad)$為 Laplace-Beltrami operator
   (3) Laplace operator 的譜由一組非負實數構成：$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty$
2. Lichnerowicz estimate：

   假設流形(M，g)的里奇曲率處處不小於一個正常數$\rho > 0$。

   也就是說，對於所有點$p \in M$和所有單位切向量 $v \in T_pM$，$Ric(v,v) \geq \rho > 0$

   (簡記為$Ric \geq \rho g$)
   Lichnerowicz 1958：在以上假設下，Laplace operator 的最小非零特徵值λ_1滿足

   $$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\rho$$
   可以看作是一種譜比較定理。
3. Obata Rigidity theorem 1962：

   $\lambda_1 = \frac{n}{n-1}\rho$ if and only if (M,g)等距同構於半徑為$\sqrt{\frac{n-1}{\rho}}$的 n 維標準球面

   $$S^n(\sqrt{\frac{n-1}{\rho}})$$

這個定理的證明使用了著名的 Bochner 技巧（Bochner formula)，它連接了梯度

場的拉普拉斯與 Ricci 曲率，是幾何分析中極為重要的工具。

簡言之，Lichnerowicz–Obata 定理表明：在正里奇曲率下，球面是唯一能讓 Laplace operator 的最小非零振盪模式「慢到不能再慢」的流形。
這個結果深刻揭示了流形的幾何（曲率）與分析（譜）之間的精妙關係。