

§ 5.1.3 Spheres S^n p.110

§ 01 $n=1$, $S^1 \simeq T_1^1$, we have $\text{Spec}(S^1, \text{can}) = \{4\pi^2 n^2, n \in \mathbb{Z}\}$

設定	周長 L	拉普拉斯算子	特徵值 λ_n	重數
標準單位圓	2π	$-\frac{d^2}{d\theta^2}$	n^2	$1 (n = 0) \cdot 2 (n \geq 1)$
書中 (周長 1)	1	$-\frac{d^2}{ds^2}$	$4\pi^2 n^2$	同上

對於周長為 L 的圓環：

弧長參數 $s \in [0, L)$, 算子 $\Delta f = -\frac{d^2 f}{ds^2}$

特徵值為 $\lambda_n = (\frac{2\pi n}{L})^2, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 因此

若 $L = 2\pi$ 則 $\lambda_n = n^2$

若 $L=1$ 則 $\lambda_n = 4\pi^2 n^2$

§ 02 Consider the n -sphere S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$

其 Laplace-Beltrami 算子譜為 $\text{Spec}(S^n, \text{can}) = \{k(k+n-1), k \in \mathbb{N}\}$

以下的推導是基於球諧函數(spherical harmonics)與分離變量法。

§ 02-1 球座標下的 Laplace 算子分解

Laplace 算子分解為徑向部分與球面部分： $\Delta_{g^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^n}$

其中 Δ_{S^n} 是 S^n 上的 Laplace-Beltrami 算子。

§ 02-2 齊次調和(homogeneous harmonic)多項式與球諧函數

$H_k := \mathbb{R}^{n+1}$ 上所有 k 次齊次調和多項式(即滿足 $\Delta_{S^n} P = 0$ 且 $P(tx) = t^k P(x)$)空間。

球諧函數：將 $P \in H_k$ 限制在 S^n 上，得到 $f_k(\theta) = P|_{S^n}$ ，稱為 k 次球諧函數。

§ 02-3 求解 Δ_{S^n} 的特徵方程：球諧函數是 Δ_{S^n} 的特徵函數

$P \in H_k, P(r, \theta) = r^k f_k(\theta)$

$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^n})(r^k f_k(\theta)) = 0$ ，展開化簡

...

得 $\Delta_{S^n} f_k = -k(k+n-1) f_k$

f_k 是 Δ_{S^n} 的特徵函數，對應特徵值為 $\lambda_k = k(k+n-1), k \in N$

其中因為 Δ_{S^n} 不作用於 r ， $\Delta_{S^n}(r^k f) = r^k \Delta_{S^n} f_k$

§ 02-4 特徵值的重數(multiplicity)

λ_n 的重數為 $\dim H_k$

暫略

§ 02-5 譜的完備性

球諧函數 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ 構成 $L^2(S^n)$ 的一組完備正交基（由 Stone-Weierstrass 定理保證）。因此， Δ_{S^n} 的譜僅包含 $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ ，無其他特徵值。

§ 03 n=2 時

譜 $\lambda_k = k(k+1)$

重數 $\dim H_k = 2k+1$

此推導結合了微分幾何（流形上的拉普拉斯算子）、譜理論（特徵值問題）和調和分析（球諧函數），是微分幾何與數學物理的經典結果。

回顧：

極座標
$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

球座標
$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \dots = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \dots$$

§ 04 我問：沒有計算 Laplace 算子的徑向部分是因為我們只在球面上討論嗎？

DeepSeek 給了一個「很師父式」的回答：「是，也不是。」

是：因為我們最終關注的是球面上的算子 Δ_{S^n} ，所以結果只涉及球面部分。

不是：在推導過程我們必須考慮整個空間的 Laplace 算子(包括徑向部分)，因為齊次調和的條件是全局的。徑向部分的計算是推導中不可或缺的部分。

為什麼徑向部分消失在最終結果中？

1. 分離變量的本質

- 當我們要求 $P = r^k f_k(\theta)$ 在整個 $\mathbb{R}^{n+1}$ 調和時，徑向部分的貢獻被 **完全吸收** 到係數 $k(k+n-1)$ 中。
- 最終結果 $\Delta_{S^n} f_k = -k(k+n-1)f_k$ 僅依賴於球面度量，因為徑向部分的作用已通過全局調和條件耗盡。

2. 球面算子的內在性

Laplace-Beltrami 算子 Δ_{S^n} 是 S^n 的 **內在微分算子**（由球面度量張量誘導），其譜理論只需考慮球面上的函數空間 $L^2(S^n)$ 。徑向部分在歐氏空間中的作用是 **橋樑**，將問題轉化為純球面問題。

以上實在說 沒看懂

若忽略嵌入空間，直接在 S^n 上定義 Δ_{S^n} ，則需要：

1. 通過球面度量張量 g_{ij} 顯式寫出算子：

$$\Delta_{S^n} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{|g|} \partial_j f \right).$$

2. 求解特徵方程 $\Delta_{S^n} f = \lambda f$ ，這在高維球面上極為複雜（需用特殊函數或對稱性）。

此技巧體現了子流形譜理論的經典策略：通過嵌入空間的結構（如歐氏空間的調和函數），間接推導子流形（如球面）的譜性質。

徑向部分在此扮演了幕後推手的角色。

§ S^3 的譜有特別的物理意義嗎？

1. 對稱性： $S^3 \cong SU(2)$ 的群結構，使其成為規範場、自旋系統、手徵費米子的理想模型。
2. 拓撲性質：作為緊緻單連通的三維流形，其譜是量子重力路徑積分的基準點。
3. 解析可解性：譜的顯式公式 $\lambda_k = k(k+2)$ 為物理問題提供嚴格解析解，成為檢驗量子場論、宇宙學數值模擬的基石。

§ 最後我天馬行空問了一個問題：有球狀鼓嗎？

DeepSeek 先說實際樂器二維球面鼓的不可行，又說碳 60 分子(富勒烯)接近球狀，其電子能級和分子振動模可用 S^2 譜近似（因對稱性高）。

二維球面駐波模擬：

<https://www.youtube.com/watch?v=vvJAgUBF4w>

§ 此處我們討論的是球面 S^n 自身的 Laplace-Meltrami 譜問題是無邊界的閉流形固有值問題，不屬於 Dirichlet 或 Neumann 類型。

核心特徵：

1. 零特徵值 $\lambda_0 = 0$ 得存在(常函數解)。

2. 譜結構完全由流形內在幾何（曲率、對稱性）決定。

Dirichlet/Neumann 的應用場景：僅當球面作為更高維區域的邊界時（如球體內部或外部問題）。

§ 丘成桐的推測

The existence of embedded minimal surfaces and topology of three-dimensional manifolds (by Shing-Tung Yau)推測：

在 S^3 中，所有嵌入的極小子流形(如赤道 S^2 、Clifford 環面等)的第一非零特徵值滿足 $\lambda_1(M) = 2$

丘成桐研究 S^3 內部的子流形（如二維曲面），而非 S^3 自身。這些子流形繼承 S^3 的曲率約束，但擁有獨立的譜結構。

核心要素	S^3 自身譜	丘成桐推測（子流形譜）
數學本質	閉流形的內在譜	子流形在環境曲率下的誘導譜
算子	Δ_{S^3} (Laplace-Beltrami 算子)	Δ_M 子流形誘導度量的 Laplace 算子)
譜	$\lambda_k = k(k+2)$	第一非零特徵值 $\lambda_1(M)$
數值關聯	$\lambda_1(S^3) = 3$	$\lambda_1(M) = 2$ （嚴格更小）
幾何核心	常曲率 +1 的對稱性	極小子流形在對稱環境中的剛性
物理詮釋	背景時空的量子漲落	膜宇宙的振動模

丘成桐推測揭示了 S^3 高對稱性對子流形譜的強制約束，將背景流形的譜理論深化至子流形層次，是微分幾何與數學物理的深刻交叉。

與 CMC 穩定性的關聯

對 S^3 中中嵌入的閉 CMC 曲面 M （維度=2），丘成桐與合作者證明：

穩定性 $\Rightarrow \lambda_1(\Delta_M) \geq 2 \Rightarrow$ 幾何剛性(如 $|A|^2 = 2$)

並提出譜等值猜想（ $\lambda_1 = 2$ ）以探索極小子流形的分類。此工作奠定幾何分析在 CMC 曲面與廣義相對論的應用基礎。

穩定性與曲率控制的物理意義：

- 膜宇宙(brane)的穩定性
- 流體介面(毛細現象)與黑洞視界