

§ Rectangular domains with boundary condition

參考 Walter A. Strauss 6.2 p.161

§ 01 Problem setup :

1. Domain : 矩形區域 $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, 其中 $a > 0$, $b > 0$, 邊界 $\partial\Omega$
2. Dirichlet 問題 : $-\Delta = \lambda u$ in Ω , $u|_{\partial\Omega} = 0$
3. 物理背景 : 這類問題常見於波動方程、熱傳導方程等物理問題, 例如矩形膜振動或固定邊界的溫度分布。

§02 $H = L^2(\Omega)$

函數族 $\{\phi_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \geq 1}$ 構成 $L^2(\Omega)$ 的 Hilbert 完備正交基 :

$$\phi_{n_1, n_2}(x, y) = \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right), n_1, n_2 \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(這些函數在 $L^2(\Omega)$ 中相互正交 $\langle \phi_{m_1, m_2}(x, y), \phi_{n_1, n_2}(x, y) \rangle = 0$)

§ 03 Dirichlet Laplace 算子的譜

$$\text{Spec}_{\text{Dirichlet}}([0, a] \times [0, b]) = \left\{ \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right), (n_1, n_2) \in (N^*)^2 \right\}$$

關聯的特徵函數為 $\{\phi_{n_1, n_2}\}$

§ 推導

- 分離變量法 (Separation of Variables) : 矩形區域的對稱性允許將偏微分方程 (PDE) 分離為兩個常微分方程 (ODE) :

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies -\frac{X''}{X} = \lambda_x, \quad -\frac{Y''}{Y} = \lambda_y, \quad \lambda = \lambda_x + \lambda_y.$$

邊界條件 $X(0) = X(a) = 0$ 和 $Y(0) = Y(b) = 0$ 給出一維問題的解 $X_{n_1}(x) = \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right)$, $Y_{n_2}(y) = \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right)$ 。

用變數分離法求出解, 再驗證一下。

§ 譜的性質

1. 最小特徵值(基態) : 當 $n_1 = n_2 = 1$, $\lambda_{\min} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$
2. 特徵值隨 n_1, n_2 增大而遞增。 $\lambda_{n_1, n_2} \rightarrow \infty$, 當 $n_1 \rightarrow \infty$ 或 $n_2 \rightarrow \infty$
3. 特徵值的重數

§ 物理意義 : 在波動方程中, 特徵值對應系統的固有頻率 (例如, 矩形鼓膜的

振動頻率)。