§ Wave equation and eigen equation

波動方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

描述波動現象（如聲波、彈性振動），時間t 是獨立變量，方程是二階時間演化方程。是雙曲型的 PDE。

Laplace 算子的特徵值問題：

$$-\Delta u = \lambda u$$

尋找空間模式的固有振動形狀（如鼓膜的駐波模式），方程是穩態（與時間無關）的線性代數問題。是橢圓形的 PDE。

談鼓面振動時，兩者都在談：

波動方程是根本的物理定律，描述振動的完整時空行為。

特徵值問題是波動方程的空間部分，用於提取系統的固有模態和頻率。

波動方程的解法通常假設解可分解為時間和空間部分的乘積：

$$u(x,y,t) = T(t)\phi(x,y)$$

代入波動方程後：$\dfrac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \dfrac{\Delta\phi(x,y)}{\phi(x,y)} = -\lambda$ 導出兩個獨立方程

時間部分：$T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = A\cos(c\sqrt{\lambda}t) + B\sin(c\sqrt{\lambda}t)$

空間部分：$-\Delta\phi = \lambda\phi$ 即特徵值問題。描述空間中的駐波模式（如矩形區域的雙正弦函數）。

例 假設矩形區域 $[0,a]\times[0,b]$ 上的波動方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right), u\big|_{\partial\Omega} = 0$

空間部分(特徵值問題)

$$\lambda_{n_1,n_2} = \pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right), \phi_{n_1,n_2}(x,y) = \sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)$$

時間部分

對每個 λ_{n_1,n_2}，時間方程為 $T'' + c^2\lambda_{n_1,n_2}T = 0 \Rightarrow T(t) = C\cos(\omega_{n_1,n_2}t) + D\sin(\omega_{n_1,n_2}t)$

其中 $\omega_{n_1,n_2} = c\sqrt{\lambda_{n_1,n_2}} = c\pi\sqrt{\dfrac{n_1^2}{a^2} + \dfrac{n_2^2}{b^2}}$ 為固有頻率。

波動方程的解為所有模態的疊加：

$$u(x,y,t) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left[A_{n_1,n_2}\cos(\omega_{n_1,n_2}t) + B_{n_1,n_2}\sin(\omega_{n_1,n_2}t)\right]\phi_{n_1,n_2}(x,y)$$

§ 物理直觀：鼓膜振動

1. 特徵函數 $\phi_{n_1,n_2}(x,y)$ ：描述鼓膜的 (n_1,n_2) 階駐波形狀（如(1,1) 為基模，(2,1) 為高階模）。
2. 特徵值 λ_{n_1,n_2} ：決定該模態的頻率 ω_{n_1,n_2} 。
3. 波動方程的解：是所有駐波模態隨時間振動的疊加。

- **音高（基頻）**：由最小特徵值 $\lambda_{1,1}$ 對應的頻率 $\omega_{1,1}$ 決定。
- **音色（泛音）**：由高階特徵值 λ_{n_1,n_2} 對應的頻率和模態形狀決定。
（例如，矩形鼓的泛頻不是基頻的整數倍，故音色較「不諧和」；圓形鼓的泛頻有簡併模態，音色更豐富。）

當需要分析鼓面的時間演化行為時（如敲擊鼓面後的瞬態振動、能量傳遞、阻尼效應等），直接處理波動方程。

當關注鼓面的固有性質時（如哪些頻率能被激發、對應的振動形狀、音色分析等），只需解特徵值問題。

在實際應用中：

工程師或樂器設計師：更關注特徵值問題，因為它直接給出樂器的發聲特性。

物理學家或數學家：可能需要解波動方程以研究非線性效應、強迫振動或能量衰減。