§ Sobolev spaces on a Riemannian manifold

對於一個定義在開區域$\Omega \subset R^n$上的函數 u，如果滿足以下條件：

(1) $u \in L^p(\Omega)$：即 u 本身是 p 次可積函數

(2) $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ for all $|\alpha| \le k$

則稱$u \in W^{k,p}(\Omega)$，其中$D^\alpha u$是 u 的弱導數。

例如 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$：以$L^2$為基底，方便配合內積與希爾伯特空間結構的 Sobolev 空間。

所謂弱導數是透過積分公式來定義的：

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u(x) \varphi(x) dx$$

對所有光滑且支集為緊(compact support) 的測試函數φ成立，則說$D^\alpha u$是 u 的弱導數。

(在第二課中，$\alpha = 1$，寫成$\int_R f(x)\varphi'(x)dx = -\int_R g(x)\varphi(x)dx$ for all $\varphi(x) \in C_c^\infty(R)$

則 g(x)是 f(x)的弱導數。)

例 $u(x) = x^{3/2}$在(0,1)上

$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \dfrac{2}{5} < \infty$ 所以$u(x) \in L^1(0,1)$

$\int_0^1 u'(x) dx = 1 < \infty$所以$u'(x) \in L^1(0,1)$，所以$u(x) \in W^{1,1}(0,1)$

$\sqrt{x} \notin W^{1,1}(0,1)$因為導數不可積。

Sobolev 空間的魔力在於它能容許一些不連續或不可微的函數進入討論，只要它們的弱導數存在且可積。

$\mathrm{H}^1(M,g) = \{u \in L^2(M); \nabla u \in L^2(M)\}$

$H_0^1(M) := L^2(M)$

1. Poincare inequality

2. Rellich theorem