

§ Distribution

Manifold is $M=S^1$, the Laplacian $\Delta = -\frac{d^2}{d\theta^2}$

$D(S^1)$: 所有在 S^1 上且 with compact support 的光滑函數。例如

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-(\theta-\pi)^2}), |\theta-\pi| < 1 \\ 0, \text{other} \end{cases} \in D(S^1) \text{ is called the test function space}$$

$D'(S^1)$: 作用在 test function 上的連續線性泛函。

例如, Dirac 分佈 $\delta_0 \in D'(S^1)$: $\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0)$ for any $\phi \in D(S^1)$

考慮 Laplacian 的 eigenequation $\Delta u = \lambda u$

The solution are $u_n(\theta) = e^{in\theta}$ and the eigenvalues $\lambda_n = n^2$

($\frac{d^2 y}{d\theta^2} = -n^2 y$, the solutions are $y(\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta$)

但如果我們想解這個方程在更廣義的空間中 (例如 Dirac 分佈是否可以當作解), 我們就需要進入 distributional solution (分佈解) 的語境。

Let $u = \delta_0$, $\langle \Delta \delta_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \Delta \phi \rangle = \Delta \phi(0)$ 所以 $\Delta \delta_0$ 是一個分佈。

特徵方程式 $\Delta u = \lambda u$

1. 光滑的解(eigenfunction) 例如 $e^{in\theta} \in L^2(S^1)$
2. 表現為分佈的解 例如 Dirac 分佈 $\delta(\theta - \theta') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\theta - \theta')}$

§ 格林核(Green function)

$M = \mathbb{R}^n, \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 我們要找一個函數 $G(x)$ 使得 $\Delta G(x) = \delta(x)$

這就是格林函數的定義: 它是 Laplace operator 的「分佈反算子」, 即 Δ^{-1} 。

在一維情況, 這等式變為: $\frac{d^2 G(x)}{dx^2} = \delta(x)$

$$G(x) = -\frac{1}{2}|x|$$

$n \geq 3$ 時, Laplace 方程的基本解為: $G(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \times \frac{1}{|x|^{n-2}}, x \neq 0$, ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 單位球的體積。

我們不要求等式在每一點都成立, 而是對任意試驗函數 $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ (這個函數在 $x=0$ 發散) $\int_{\mathbb{R}^n} G(x) \Delta \phi(x) dx = \phi(0)$

也就是說， G 作為「對偶作用的泛函」，實現了 δ 的功能。

要解一個 Poisson 方程 $\Delta u(x) = f(x)$

只要能將 f 寫為一個分佈，就可以用格林核來表示： $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy$

這其實就是卷積 $u = G * f$

在黎曼流形 M 上的格林核：

在更一般的黎曼流形 M 上，若 Δ_g 是 Laplace-Beltrami operator，則格林核 $G(x,y)$

滿足 $\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$

即：對固定 y ，把 $G(x,y)$ 看成 x 的函數，它是滿足以 y 為奇異源的 Poisson 解。

這裡 $\delta_y(x)$ 是一個分佈，所以 $G(x,y)$ 也不是通常意義下的光滑函數（它在對角線 $x=y$ 奇異），但它在 $\mathcal{D}'(M \times M)$ 中是良定的。

格林核與譜理論的關係

你可以將格林核表示為拉普拉斯算子的譜分解： $G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(y)}{\lambda_n}$

其中 $\{\phi_n\}$ 是 Δ 的本徵函數， $\{\lambda_n\}$ 是本徵值。

- 如果 M 是緊的，這個和是收斂的；
- 如果 M 是非緊的（如 $\mathbb{R}^n$ ），這變成積分形式（連續譜）；
- 此和在對角線 $x = y$ 上發散 $\Rightarrow G(x,y)$ 是一個分佈。

概念	意義
格林核 $G(x)$	是 Laplacian 的基本解，即滿足 $\Delta G = \delta$ 的分佈解
為什麼是分佈	因為 G 在原點奇異，不是光滑函數，但對試驗函數作用是良定的
與譜理論關係	格林核可透過本徵展開定義，說明它與算子的反算子密切相關
在黎曼流形上	格林核 $G(x,y)$ 是 Δ_x 的反算子核心，在 $x = y$ 奇異，屬於分佈 $\mathcal{D}'(M \times M)$