

考慮 $D(t) \subset \mathbb{R}^1$

設 $D(t) := D_-(t) \cup D_+(t), 0 \leq t < 1$

其中 $D_-(t) = (-\pi, \pi(t-1)), D_+ = (\pi(1-t), \pi)$ 又定義 $D(1) = (-\pi, \pi)$

此時 $Lf = -\Delta_M f - |A|^2 f = -f$

當 $0 < t < 1$ 時，知 $u_1(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}(x - \pi(t-1)), x \in D_-(t) \\ \sin \frac{1}{t}(x + \pi(t-1)), x \in D_+(t) \end{cases}$ 為 $L(t)$ 在 $D(t)$ 上的第一特徵函

數，而相應的第一特徵值為 $\lambda_1(t) = \frac{1}{t^2}$

但當 $t=1$ 時， $u_1(t) = \cos \frac{x}{2}$ 則為第一特徵函數，其相應的第一特徵值為 $\lambda_1(t) = \frac{1}{4}$

得 $\lim_{t \rightarrow 1^-} \lambda_1(t) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lambda_1(1)$

此即 $\lambda_1(t)$ 對於 t 並不連續。

當 $0 < t < 1$ 時， $Lu = -u$ 須滿足 Dirichlet condition (端點值為 0)

在每個子區間求解方程 $-u'' = \lambda u$ $u(a)=u(b)=0$

General solution 為 $u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}(x-a))$ ，代入邊界條件 $\sqrt{\lambda}(b-a) = n\pi, n \in \mathbb{N}$

因為區間長度 $b-a = \pi t$ ， $\sqrt{\lambda} = \frac{n}{t}$ 故 $\lambda_n = \left(\frac{n}{t}\right)^2$

第一特徵值($n=1$)為 $\lambda_1(t) = \frac{1}{t^2}$

在 $D_-(t)$ 中，解為 $u_1(x) = \sin\left(\frac{1}{t}(x - \pi(t-1))\right)$

在 $D_+(t)$ 中，解為 $u_1(t) = \sin\left(\frac{1}{t}(x + \pi(t-1))\right)$

當 $t=1$ 時

區域合併 $D(1) = (-\pi, \pi)$ 為單一連續區間。

需解 $-u''(x) = \lambda u(x)$ ， $x \in (-\pi, \pi)$

邊界條件：由於區間是由兩子區間合併，須滿足

(1) Dirichlet 條件 $u(-\pi) = u(\pi) = 0$

(2) 函數在 $x=0$ 處連續且導數連續，以確保函數合併後函數光滑。

由對稱性 General solution 為 $u(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ ，代入 $u(\pi) = 0$

$$\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0\Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=\frac{(2n-1)\pi}{2}, n\in N\Rightarrow \lambda=(\frac{2n-1}{2})^2$$

第一特徵值(n=1)， $\lambda_1=\frac{1}{4}$ 對應的特徵函數為 $u_1(x)=\cos\frac{x}{2}$

當 $t\rightarrow 1^-$ 時，原區域分裂為兩個子區間，特徵值為 $\lambda_1(t)=\frac{1}{t^2}\rightarrow 1$ 。

但 $t=1$ 時，區域合併導致邊界條件與解的光滑性要求改變，特徵值跳躍至 $\frac{1}{4}$ 。

此結果與 $t<1$ 時的特徵值不連續，反映區域結構變化對特徵值問題的深刻影響。